\\ 129 \\

Opzioni reali d'investimento e interazione competitiva: programmazione dinamica stocastica in optimal stopping

di

Carlo Alberto Magni

Gennaio 1996

Università di Modena
Dipartimento di Economia Politica
Viale Berengario, 51
41100 Modena (Italia)
e-mail: magni@merlino.unimo.it

OPZIONI REALI D'INVESTIMENTO E INTERAZIONE COMPETITIVA: PROGRAMMAZIONE DINAMICA STOCASTICA IN OPTIMAL STOPPING

CARLO ALBERTO MAGNI

Dipartimento di Economia Politica
Università di Modena

INTRODUZIONE

Il presente lavoro si occupa di opzioni di investimento industriale e strategico, per le quali si adotta una prospettiva di ottimizzazione abbandonando la tradizionale impostazione finanziaria. Vengono valutate opzioni di differimento secondo un'ottica di optimal stopping; nella regione di arresto la funzione risultante dall'esercizio dell'opzione è il risultato di un problema di controllo ottimo stocastico, sul presupposto che l'investitore sia in grado di influenzare almeno parzialmente i flussi scaturenti dal progetto intrapreso. Tale problema è incorporato in un problema di optimal stopping e conseguentemente si pone la questione dell'esistenza della soluzione, che viene risolta adeguando la formalizzazione e adottando considerazioni di tipo economico. Pur superando da un lato il concetto di opzione comune, si propongono infine due brevi esempi in cui tale nozione conserva la sua significatività.

Typeset by $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TEX

Struttura dell'articolo

Il presente lavoro si suddivide in quattro sezioni, di cui la prima è volta a chiarire l'ottica di ottimizzazione in cui ci si pone al fine di valutare opzioni d'investimento industriale o strategico da un punto di vista strettamente aziendale, spiegando le ragioni di un progressivo allontanamento dalla teoria delle opzioni finanziaria. La seconda sezione è dedicata alla definizione formale di un problema di decisione in cui il comportamento dell'unità decisionale considerata nonché dei suoi concorrenti è ritenuta rilevante ai fini della strategia di decisione. La terza sezione è dedicata alla risoluzione del problema delineato in precedenza e infine l'ultima propone un'estensione con due brevi esempi di opzione comune *una tantum*, così come intesa in [10]. Alcune considerazioni finali riassumeranno a fini clarificatori la prospettiva secondo la quale il problema delle opzioni d'investimento è stato trattato.

1. La teoria dell'option pricing e le opzioni reali

Una letteratura relativamente recente suggerisce l'applicazione della contingent claims analysis nella valutazione degli investimenti industriali e/o strategici (cfr. [4], [6], [11], [13], [14], [19]). L'indubbio beneficio tratto da questa impostazione è però controbilanciato da notevoli limitazioni concettuali che inducono, a nostro parere, a tentare di superare l'ottica finanziaria. Tra queste, particolarmente stringenti sono le ipotesi di mercato perfetto e di esistenza in esso di attività che possano replicare il business sotteso. Più d'ogni altro vi è però un elemento che pare determinante nel rendere per certi aspetti inapplicabile la teoria delle opzioni: al momento dell'esercizio dell'opzione l'attività sottostante ha un prezzo ben determinato e visibile e pertanto il guadagno, nel nostro caso il valore attuale netto atteso del progetto, è automaticamente determinato. La limitazione consiste non tanto nell'essere questo valore attuale netto una variabile aleatoria, giacché l'aleatorietà viene risolta attraverso l'uso di una media, quanto piuttosto nella natura di flusso continuo dell'investimento intrapreso e nelle conseguenti implicazioni. L'opzione esercitata non dà diritto a ricevere un titolo negoziabile e quindi immediatamente smobilizzabile ma fornisce un'attività i cui frutti vengono raccolti in modo continuato per un certo lasso di tempo. È proprio l'intervallo di tempo attraverso cui questo investimento si dipana che modifica il concetto di attività sottostante in modo radicale. In un mercato finanziario all'esercizio dell'opzione call corrisponde un'unica somma, derivante dalla vendita del titolo su cui era scritta l'opzione. L'operazione finanziaria avviene *hic et nunc*, viceversa l'investimento protrae i suoi effetti

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX per un certo tempo. Tale differenza è fondamentale per cogliere una pesante limitazione dell'applicazione della contingent claims analysis alla valutazione degli investimenti: la natura continuativa dell'investimento permette al decisore di intervenire nel processo di formazione del flusso finanziario. L'utilizzo di un valore attuale netto atteso, il quale asseconda la logica di corresponsione puntuale e determinata del guadagno ricavato da un'attività finanziaria, appiattisce l'idea del dipanarsi dell'investimento nel tempo e della determinabilità del suo valore. Infatti, esercitando l'opzione reale si viene in possesso dell'attività sottostante il cui prezzo non è di per sé determinato, ma determinabile, intendendo con questo aggettivo la possibilità da parte dell'investitore di determinare il prezzo dell'attività nel corso del tempo. In concreto, in un mercato finanziario l'investitore esercita l'opzione osservando il prezzo dello stock e *quel* prezzo determina il suo guadagno; nel caso delle opzioni reali, si potrebbe dire che il loro esercizio non consegna un'attività ma uno scenario dentro il quale l'investitore può "giocare" per ricevere la propria messe di utili in un arco di tempo (eventualmente infinito) durante il quale egli opera nello scenario suddetto. L'asimmetria competitiva esistente in ogni settore economico consente all'investitore di influire, se pur parzialmente, sulla dinamica dei flussi facendo leva su particolari variabili in proprio possesso. Una maggiore corrispondenza con la logica dei mercati finanziari si avrebbe, in questo senso, solo nel caso di concorrenza perfetta per la quale un'azienda è price-taker cioè non è in grado di influenzare il prezzo dei beni prodotti. Ma la concorrenza perfetta è un mero caso di scuola, esistono sempre e comunque asimmetrie che giustificano l'uso di opportune variabili al fine di ottimizzare la formula imprenditoriale. Formalmente, l'azienda può agire su controlli che contribuiscano a massimizzare i flussi dell'investimento, ciò che è impensabile relativamente ad un titolo finanziario. La teoria delle opzioni suggerisce, nella sua ottica, l'idea di prezzo di un'attività e pertanto ha condotto all'uso frequente, nel suo trapasso ad un ottica aziendale, di un valore attuale netto atteso quale prezzo, calcolato a partire dall'ipotesi standard di evoluzione di tale valore secondo un moto geometrico browniano. Ma questa logica non è idonea fino in fondo a trattare valutazioni di investimenti, proprio per il motivo che non considera la possibilità, da parte di colui che esercita l'opzione, di influire sulle determinazione dell'attività sottostante nel corso del tempo. Nel trattare valutazioni di investimenti aziendali in questa ottica si commette l'errore di forzare l'interpretazione finanziaria per la quale si deve fingere che il valore dell'investimento venga corrisposto puntualmente, così come un qualunque stock finanziario. Al contrario, il lasso di tempo lungo il quale i flussi fuoriescono, congiuntamente all'esistenza di asimmetrie competitive (se queste non vi fossero non si potrebbero influenzare i flussi dell'investimento) permette di guidare, per così dire, l'evoluzione temporale dei flussi, la quale diventa in parte stocastica e in parte deterministica. La parte deterministica è funzione di un controllo $u(t)$ che viene posto in essere per rendere massimi i flussi di cassa scaturenti dall'investimento. La parte aleatoria invece raccoglie tutte le informazioni disponibili sulla concorrenza e sulle reazioni da essa adottate come risposta all'esercizio dell'opzione da parte dell'azienda in questione. L'ottica finanziaria sembra fallire proprio su un concetto basilare dell'analisi degli investimenti, l'interazione competitiva, almeno laddove essa è determinante, come nel caso di investimenti strategici. Il tentativo di alcuni autori di inserire la considerazione della dinamica competitiva attraverso il concetto di opzioni comuni costituisce un miglioramento concettuale in quanto si prende atto della diversa natura delle opzioni reali. Il Trigeorgis [19] espone numerosi casi in cui tenta una descrizione degli effetti dell'interagire di più centri decisionali, ma, rimanendo nell'ambito della contingent claims analyisis e in particolare utilizzando esclusivamente l'equazione di Black-Scholes, adeguatamente riformulata per ogni caso trattato, è costretto ad ancorare il discorso ancora alle ipotesi proprie della teoria finanziaria e rinunciare a descrivere in qualche modo le determinanti concorrenziali; in [6] si accenna, *en passant*, all'esistenza di altre aziende la cui presenza può comportare una riduzione del valore del business intrapreso, ma non vengono citate le opzioni comuni e l'idea della competizione sembra servire solo per giustificare l'ipotesi assunta di evoluzione della variabile V secondo un moto geometrico browniano combinato con un processo discontinuo di Poisson. Una più estesa trattazione degli effetti della concorrenza nel settore si ha a livello microeconomico e macroeconomico, sotto un'ottica quindi che esula dal nostro contesto, volto allo studio di processi di decisione individuali, e quindi più orientato all'ottica aziendale.

È opportuno tuttavia rilevare in secondo luogo il fatto che il conflitto economico tra aziende del settore esiste a prescindere dalle caratteristiche dell'opzione detenuta. La concorrenzialità assume importanza in ogni momento indipendentemente dal grado di esclusività dell'opzione: di fronte all'esercizio anche di un'opzione esclusiva possono esservi azioni di risposta o ritorsione da parte dei concorrenti, i quali, esercitando ad esempio altre opzioni di loro pertinenza, cercano di ridurre il valore V del progetto. La rivalità permanente tra aziende di un settore economico, con i comportamenti conflittuali o cooperativi esistenti tra gli agenti stessi, influenza le azioni, l'importo del flusso finanziario aziendale nonché la sua distribuzione temporale. La suddivisione tra opzioni esclusive e opzioni comuni con la connessa nozione di grado di esclusività di un'opzione è utile ma può non essere sufficiente al fine di una corretta descrizione dei fenomeni competitivi e dei processi di decisione, imponendo per certi versi un suo superamento.

Inoltre, e ben più importante, l'uso della teoria delle opzioni impedisce di esplicitare in qualche modo le ripercussioni delle mosse strategiche dei concorrenti su V e di tener conto, in modo visibile, delle "armi di battaglia" del decisore e degli altri competitori, nonché di descrivere la possibilità che un'opzione detenuta in comune con altri concorrenti possa essere sottratta al nostro decisore privandolo una volta per tutte della possibilità di esercizio della stessa. In quest'ultimo caso il valore dell'opzione si riduce non indirettamente attraverso le ripercussioni su V ma direttamente, nei modi che vedremo (cfr. anche [12]). Il Trigeorgis (*cit.*) è addirittura costretto a conformare i propri ragionamenti e il proprio linguaggio alla teoria dell'option pricing introducendo l'idea di dividendi a decremento del valore del business e assumendo nota la data di maturazione del dividendo. Dixit e Pindyck [4] riprendono il caso, trattato anche dal Trigeorgis, di aleatorietà dell'epoca in cui il valore V si riduce, ma la descrizione formale non è atta a descrivere le modalità attraverso cui vengono intrapresi e risolti i conflitti tra agenti economici; soprattutto non vi è rappresentazione, se pur approssimativa, degli strumenti competitivi in mano ai concorrenti e delle ripercussioni degli stessi sulla competizione nel settore.

Ci pare a questo punto indispensabile suggerire un ambiente concettuale formalizzato utilizzabile per trattare la valutazione di investimenti industriali e strategici concentrando la propria attenzione sulle dinamiche concorrenziali. L'opportunità d'investimento deve essere valutata per prima cosa nel suo grado di esclusività. Detto $F(x)$ il valore dell'opzione, dove x segue il moto geometrico browniano $dx = \alpha x dt + \sigma x dz$, è necessario definire un parametro λ di esclusività che riduce il valore di tale opportunità a causa del possibile esercizio dell'opzione da parte di altri agenti presenti nel mercato; λdt rappresenta la probabilità che nel prossimo intervallo di tempo dt l'interazione competitiva impedisca al detentore di esercitare l'opzione. Il concetto di opzione comune *una tantum* introdotto in [12] viene quindi conservato. La possibilità che altri subentri e agisca anticipando le mosse del nostro investitore fa ridurre il valore dell'attesa, cioè il valore di $F(x)$ nella regione $0 \leq x < x^*$, dove x^* rappresenta il livello soglia che giustifica l'investimento. Ma finché $x < x^*$ la concorrenza non agisce sul valore $V(x)$ dell'investimento, dal momento che esso non esiste ancora! Al momento dell'esercizio dell'opzione l'investitore riceve il valore $V(x)$ aleatorio, o meglio parzialmente aleatorio. Utilizzare, anche nella regione $x \geq x^*$, un moto geometrico browniano del tipo

$$dx = \alpha x dt + \sigma x dz$$

come si assume generalmente nella letteratura delle opzioni reali significa, come visto, mortificare l'aspetto dell'interazione competitiva che può incidere sensibilmente sul valore dell'investimento e soprattutto sembra sancire implicitamente l'impossibilità da parte dell'investitore di influenzare il valore dell'investimento nel corso della sua attuazione attraverso azioni di difesa e protezione dagli attacchi dei concorrenti. L'esercizio dell'opzione, a ben vedere, non consegna in mano del fruitore un valore V pur fluttuante aleatoriamente, ma consegna un "gioco" al quale il decisore ha deciso di partecipare. Il valore x^* è quello che giustifica la partecipazione al gioco, più correttamente dà via al gioco, nel quale il nostro investitore deve mirare a massimizzare il valore di V. A tal fine egli utilizza le armi in suo possesso valutando attentamente le possibili mosse di risposta degli avversari. L'analogia con le opzioni finanziarie si stempera dunque fino ad annullarsi nel momento in cui si trattano situazioni in cui l'attività sottostante all'opzione è un ambiente di scontro con una pluralità di agenti, un gioco a più giocatori, uno scenario in cui è indispensabile non perdere di vista il comportamento di altre unità decisionali. Tanto più questo è vero quanto maggiormente strategico è il carattere dell'investimento. Si pensi all'ingresso in un mercato estero o in un altro settore economico o all'espansione tramite fusione o incorporazione di aziende o ancora a processi di integrazione verticale o orizzontale: in tutti questi casi la natura dell'investimento e il suo peso in termini di impegno finanziario sono tali da giustificare un'attenta analisi della struttura di base del settore economico di appartenenza e una valutazione precisa delle caratteristiche competitive dei concorrenti, delle possibili reazioni, dei vantaggi competitivi e degli strumenti a disposizione per poter difendersi o aggredire. L'uso dell'option pricing è pertanto insoddisfacente, a nostro parere, sia perché basata su ipotesi spesso distorsive della realtà economico-aziendale, sia perché a volte fuorviante nell'interpretazione delle interazioni competitive, sia infine perché non idonea a trattare un più elevato livello di astrazione e comprensione dei fenomeni umani, in cui le azioni degli agenti, frutto di scelte e caratteristiche individuali peculiari, sono determinanti nel definire l'evoluzione degli scenari e i risultati finali. Da quanto sopra esposto risulta allora chiaro, non foss'altro per i riferimenti lessicali, che la Teoria del controllo ottimo e la Teoria dei Giochi possono costituire un valido ausilio per valutare più correttamente processi di decisione aziendale individuali e interattivi. La teoria dell'option pricing deve esser abbandonata per compiere questo passo, perché determinata da ipotesi e da ragionamenti del tutto inapplicabili ormai ai nostri fini, nel tentativo di formalizzare, pur con l'introduzione di nuove ipotesi, la realtà economica di riferimento. La programmazione dinamica al contrario, cui Dixit e Pindyck (*cit.*) restituiscono dignità[1] dopo il perentorio rigetto del Trigeorgis (*cit.*), si rivela strumento più affidabile e idoneo allo scopo.

2. Controllo ottimo e giochi differenziali

Nella presente e nella successiva sezione si supporrà $\lambda = 0$ ossia si assumerà che l'opzione non possa essere sottratta al detentore. Il problema da risolvere è un problema di optimal stopping, consistente nel determinare la funzione

$$F(x) = \max \left[\Omega(x) \, , \, \frac{1}{(1+\varrho dt)} \; \mathcal{E}\left(F(x+dx)\right) \right] ; \tag{1}$$

dove la funzione $\Omega(x)$ derivante dall'esercizio dell'opzione reale è espressione di un gioco a cui il decisore decide di partecipare non appena la variabile x raggiunga il valore x^* che giustifichi l'optimal stopping. Il secondo termine rappresenta invece il valore derivante dall'attesa e in esso ϱ esprime il costo opportunità del capitale (supposto costante nel tempo). Il decisore, fino ad allora passivo, dà vita ad un gioco a più giocatori, ciascuno dei quali agirà su un controllo che incide sulla funzione obiettivo dell'investitore. La passività del decisore nella regione $x < x^*$ è messa in luce da un ipotesi di evoluzione della variabile x secondo un processo stocastico totalmente indipendente dalla sua volontà, ad esempio si può ipotizzare il moto

$$dx = \alpha x dt + \sigma x dz. \tag{2}$$

[1] Dixit e Pindyck mostrano come gli stessi risultati dati dalla teoria delle opzioni possono essere ottenuti con l'uso della programmazione dinamica, la quale può essere vista come un'estensione dinamica e iterativa del criterio del Valore Attuale Netto.

Ma laddove egli decida di dare vita al gioco d'investimento egli potrà in qualche modo, al pari degli altri giocatori, influenzare la variabile x, la quale viene sospinta dall'interazione dei controlli dei giocatori. Lo stato del sistema, rappresentato da x, è pertanto determinato da più individui, i quali scelgono le proprie strategie in modo da massimizzare le proprie funzioni obiettivo. Il processo stocastico che descrive l'evoluzione dello stato risente anche dei controlli esercitati dai giocatori e pertanto nella regione $x > x^*$ l'evoluzione dello stato deve tener conto della "nascita" del gioco; essa può allora essere espressa da un processo di diffusione del tipo

$$dx = g(x, u_1, u_2, \ldots, u_n)dt + \sigma(x, u_1, u_2, \ldots u_n)dz \tag{3}$$

dove con u_i, $i = 1, \ldots, n$ si indicano i controlli dei giocatori.

Il vantaggio nell'utilizzare la Teoria del controllo ottimo e la Teoria dei Giochi va a scapito di una maggiore complessità nella formalizzazione e risoluzione del problema (oltre alla presenza di problemi di esistenza della soluzione di cui si parlerà più avanti) ma il contributo fornito è a nostro parere decisivo per una corretta rappresentazione di un processo di decisione individuale e interattivo. Nel seguito ci riferiremo a giochi a due giocatori, matematicamente più gestibili; oltre a essere l'ambiente ovvio in situazioni di duopolio o di presenza di due leader nel settore, tale restrizione può comunque adattarsi a settori con una presenza plurima di unità decisionali: è sufficiente riunire le proprie conoscenze e informazioni sugli avversari in un unica funzione obiettivo e un unico controllo che esprima, almeno approssimativamente, il loro comportamento.

La formalizzazione e la risoluzione del problema descritto operano un salto di tipo concettuale e matematico. La teoria delle opzioni risulta inadatta a siffatto salto: essa dovrebbe poter trattare modelli in cui meritano attenzione considerazioni di altro tipo rispetto a quelle proprie della contingent claims analysis; essa si cala infatti in un contesto che è profondamente diverso da quello della concorrenza in un settore economico, giacché nei mercati finanziari la competizione è inesistente e sembra ardua l'impresa di farla rientrare in qualche modo assieme alle nozioni di prezzo e di arbitraggio in un'equazione *à la* Black-Scholes. La programmazione dinamica, più flessibile, sembra ammettere un'estensione concettuale e formale sì da fornire descrizioni significative di un determinato processo decisionale e, sotto determinate condizioni, esistenza della soluzione dell'optimal stopping problem.

Il problema che ci si propone di risolvere è la valutazione di un investimento strategico con opzione di differimento: l'azienda che detiene l'opzione deve decidere quando è conveniente esercitarla, osservando la variabile x (la quale rappresenta un qualsivoglia indice di convenienza economica dell'investimento: il prezzo di un prodotto, il profitto, la quantità venduta etc.) che fluttua secondo la (2) fino a raggiungere (eventualmente) la soglia x^*, che dà origine al gioco a due giocatori, per il quale vige la (3) con n=2 e in cui il secondo giocatore[2] influenza la funzione obiettivo negativamente attraverso il controllo u_2, mentre il controllo u_1 del primo ha per la stessa un effetto benefico. Di seguito viene formalizzato il problema: si tratta, come preannunciato, di risolvere un problema di optimal stopping che incorpora in sé un problema di Teoria dei Giochi (oppure di Controllo ottimo se n=1), reso ancor più complicato dal fatto che, in generale, la variabile di stato non è rispecchiata nella sua evoluzione semplicemente da un'equazione differenziale ma più in generale da un'equazione differenziale stocastica. Precisamente, si cerca il valore di

$$F(x) = \max\left[\Omega(x)\,,\ \frac{1}{1+\varrho dt}\ \mathcal{E}\left(F(x+dx)\right)\right]; \tag{4}$$

$\Omega(x)$ è a sua volta definita come

$$\Omega(x) = J^1(x) - I$$

dove I è il costo dell'investimento e dove $J^1(x)$ è espressa come

$$J^1(x) = \max_{u_1} \mathcal{E}\left(\int_{t_0}^{\infty} f^1(t, x(t), u_1(t), u_2(t))\, dt\right). \tag{5}$$

Al giocatore è invece preposta la funzione

$$J^2(x) = \max_{u_2} \mathcal{E}\left(\int_{t_0}^{\infty} f^2(t, x(t), u_1(t), u_2(t))\, dt\right) \tag{6}$$

con entrambe le massimizzazioni soggette all'equazione di stato

$$dx = g(x, u_1, u_2)dt + \sigma(x, u_1, u_2)dz \tag{7}$$

[2] D'ora in poi il decisore nella cui ottica ci porremo è da intendersi come il primo giocatore.

e con $x(t_0) = x_0$. La funzione $f^1(\cdot)$ in (5) rappresenta il flusso finanziario continuo derivante al giocatore 1 dall'intrapresa del progetto; analogo significato ha la funzione $f^2(\cdot)$ per il secondo giocatore. Un caso particolare si ha ovviamente quando la funzione $\sigma(x, u_1, u_2)$ è la funzione nulla, ciò che trasforma la (7) in un'equazione differenziale del tipo

$$x'(t) = g(t, x(t), u_1(t), u_2(t)). \tag{8}$$

In tal modo il primo giocatore è consapevole della presenza della concorrenza e di come essa possa influenzare la variabile x e la stessa funzione $J^1(x)$. Le funzioni f^1 e f^2 si suppongono conosciute dal primo giocatore e inoltre sufficientemente regolari da garantire l'esistenza della soluzione di equilibrio di Nash, data da

$$J^1(u_1^*, u_2^*) \geq J^1(u_1, u_2^*) \tag{9a}$$

e da

$$J^2(u_1^*, u_2^*) \geq J^2(u_1^*, u_2) \tag{9b}$$

dove u_1^* e u_2^* si riferiscono alle strategie di equilibrio dei giocatori 1 e 2 rispettivamente. Se le strategie cercate sono di tipo *feedback*, allora $u_i = u_i(t, x(t))$, i=1, 2. Un problema di questo tipo verrà chiamato problema di *Teoria dei giochi in optimal stopping* (d'ora in poi *ToGOS*).

In questa sede non tratteremo un problema *ToGOS* ma ci concentreremo su un caso particolare dello stesso, il quale costituisca a sua volta un'estensione dei problemi di valutazione di investimenti trattati con la contingent claims analysis (i quali verranno d'ora in poi indicati con la semplice sigla *CCAOS*[3]). Si descriverà e si fornirà un esempio di valutazione di investimenti utilizzando la strumentazione tipica del controllo ottimo stocastico. Il motivo per cui è interessante passare attraverso questa tappa prima di giungere alla trattazione di un problema *ToGOS* risiede nel fatto che un problema di *controllo ottimo stocastico in optimal stopping* (d'ora in poi *COSOS*) può presentare alcuni vantaggi rispetto agli altri casi suindicati. Un problema *COSOS* si presenta come segue:

$$F(x) = \max \left[\Omega(x)\,,\ \frac{1}{1 + \varrho dt}\ \mathcal{E}\left(F(x + dx)\right) \right]; \tag{10}$$

[3] La sigla CCAOS sta per "Contingent Claims Analysis Optimal Stopping" per indicare che il problema, trattato secondo la teoria delle opzioni, è pur sempre di optimal stopping, lo *stopping* consistendo nell'esercizio dell'opzione.

$\Omega(x)$ è a sua volta definita come

$$\Omega(x) = J(x) - I \tag{10.1}$$

dove il primo addendo del secondo membro è dato da

$$J(x) = \max_u \mathcal{E}\left(\int_{t_0}^{\infty} f(t, x(t), u(t))\, dt\right) \tag{11}$$

con la massimizzazione soggetta all'equazione di stato

$$dx = g(x, u)dt + \sigma(x, u)dz \qquad x(t_0) = x_0. \tag{12}$$

Ora, rispetto ai *CCAOS* questo tipo di problema apre uno spiraglio interessante relativo alla possibilità che il decisore sia in grado di controllare, in un modo o nell'altro, parzialmente o integralmente, l'evoluzione della variabile x. Si tratta già di un notevole miglioramento, perché si immerge il processo di decisione in un contesto in cui l'aleatorietà viene per così dire gestita da azioni individuali e quindi, almeno parzialmente, controllata. Le funzioni $f(x, u)$ nella (11) e $g(x, u)$ e $\sigma(x, u)$ nella (12) rappresentano il modo attraverso cui aleatorietà e azione individuale interagiscono e quindi descrivono la realtà in modo meno approssimato del semplice moto geometrico browniano utilizzato dalla teoria finanziaria in cui niuno spazio era lasciato alla discrezionalità del decisore. Rispetto ai *ToGOS* lo svantaggio costituito dall'esistenza di un unico controllo può essere risolto tarando adeguatamente la funzione $f(\cdot)$ come dipendente dal controllo del decisore e dalla variabile x, ossia prendendo in considerazione, ai fini della sua determinazione, le effettive potenzialità dell'investitore e capacità di controllo rispetto alla concorrenza. Certo, questo è solo un palliativo e la rappresentazione formale dei fenomeni ne risulta impoverita, ma il vantaggio derivante dalla maggiore gestibilità matematica del problema può compensare questo impoverimento interpretativo, tanto più se si considera che nella realtà aziendale (in particolar modo quella italiana, costituita da una miriade di piccole imprese) sono per lo più assenti o, nel migliore dei casi carenti, le risorse e conoscenze necessarie per operare valutazioni in modo più formalizzato[4]. A ciò si aggiunga che alcune situazioni si prestano naturalmente ad essere interpretate nella logica

[4] Esiste sicuramente uno iato (incolmabile?) e una proporzione inversa tra accettabilità di uno strumento di valutazione aziendale e la sua complessità, gestibilità e comprensione; il risultato è spesso quello di rigettare analisi formali significative per incapacità di gestione, congiunta a una forma di sospetto tipica di chi condanna tutto ciò che oltrepassa le proprie capacità.

dei *COSOS*: i leader di diversi settori economici possono possedere una capacità competitiva tale da gestire il mercato in modo pressoché completo e secondo il proprio gradimento, non curandosi delle reazioni dei follower che in quanto tali non possono far altro che attuare una strategia di "one-sided optimization" una volta osservate le mosse del leader.

Formalmente, l'inserimento di un problema di controllo ottimo stocastico in un problema di optimal stoppping può creare difficoltà nel calcolo del valore soglia x^* della variabile aleatoria considerata, dal momento che i due problemi devono essere connessi attraverso le condizioni al contorno di continuità delle funzioni $F(x)$ e $F'(x)$ nel punto x^* (la prima comunemente definita value-matching condition, la seconda nota come smooth-pasting condition o condizione di tangenza). Nella regione $0 \leq x < x^*$ la funzione $F(x)$ assume l'espressione

$$F(x) = A_1 x^{\beta_1} \qquad A_1 > 0$$

dove β_1 è la soluzione positiva dell'equazione

$$\frac{1}{2}\sigma^2\beta(\beta-1) + \alpha\beta - \varrho = 0.$$

Il primo ostacolo da risolvere è gestire il problema di controllo ottimo stocastico in modo che $\Omega(x)$ sia monotona crescente rispetto a x (e positivamente divergente per x che tende ad infinito); se così non fosse la condizione di tangenza non potrebbe verificarsi, oltre all'insensatezza del problema dal punto di vista economico (chi mai farebbe un investimento se l'incremento di x fa aumentare il valore dell'attesa e ridurre il valore dell'investimento?). L'ostacolo è agevolmente rimovibile scegliendo opportunamente la funzione $f(x, u)$. Ben più complesso è il problema che sorge relativamente alla forma di $\Omega(x)$. Nei *CCAOS* essa è descritta come $V(x) - I$, dove $V(x)$ è semplicemente funzione lineare di x. In tal caso le condizioni viste risultano facilmente applicabili e il calcolo di x^* agevole. A destra di x^* la funzione esponenziale relativa al valore dell'attesa viene abbandonata per la funzione $V(x) - I$ (vedi Fig. 1).
Ma la nuova funzione $\Omega(x) = J(x) - I$ il cui valore è determinato dalle strategie dei giocatori non è, in generale, una funzione lineare. Affinché le condizioni al contorno siano soddisfatte, ferma restando per $x < x^*$ la forma di $F(x)$, $\Omega(x)$ deve comunque essere una curva crescente tangente alla precedente in x^*, e quindi deve essere del tipo

$$\Omega(x) = Ax^{\gamma} - I. \tag{13}$$

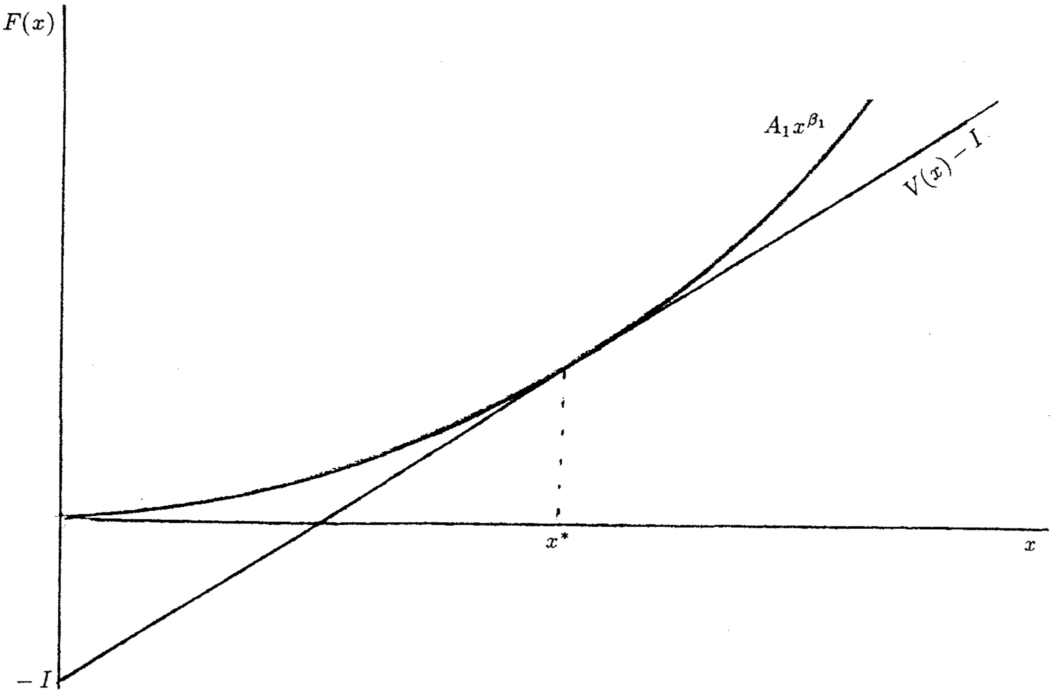

FIGURA 1

con $\gamma > 0$. In particolare, se si sceglie $\gamma > 1$ si ha una configurazione grafica del tipo di Figura 2, ovvero si ha una funzione convessa, se invece si pone $\gamma < 1$ allora la funzione sarà concava (Figura 3).
È poi ovvio che deve essere $\gamma < \beta_1$ al fine di consentire in entrambi i casi la tangenza delle due curve. È possibile verificare formalmente l'intuizione risolvendo per x e A_1 le due equazioni

$$Ax^\gamma - I = A_1 x^{\beta_1}$$
$$\gamma A x^{\gamma-1} = \beta_1 A_1 x^{\beta_1 - 1}$$

da cui è agevole ricavare

$$x^* = \left[\frac{\beta_1}{\beta_1 - \gamma}\left(\frac{1}{A}\right) I\right]^{1/\gamma}. \tag{14}$$

Affinché la (14) sia economicamente significativa deve essere necessariamente $x^* > 0$. Poiché desideriamo che la funzione $Ax^\gamma - I$ sia crescente, il coefficiente $A > 0$ deve essere positivo, pertanto $x^* > 0 \Longleftrightarrow \gamma < \beta_1$. È ovvio notare come il caso della funzione lineare comunemente utilizzata in letteratura

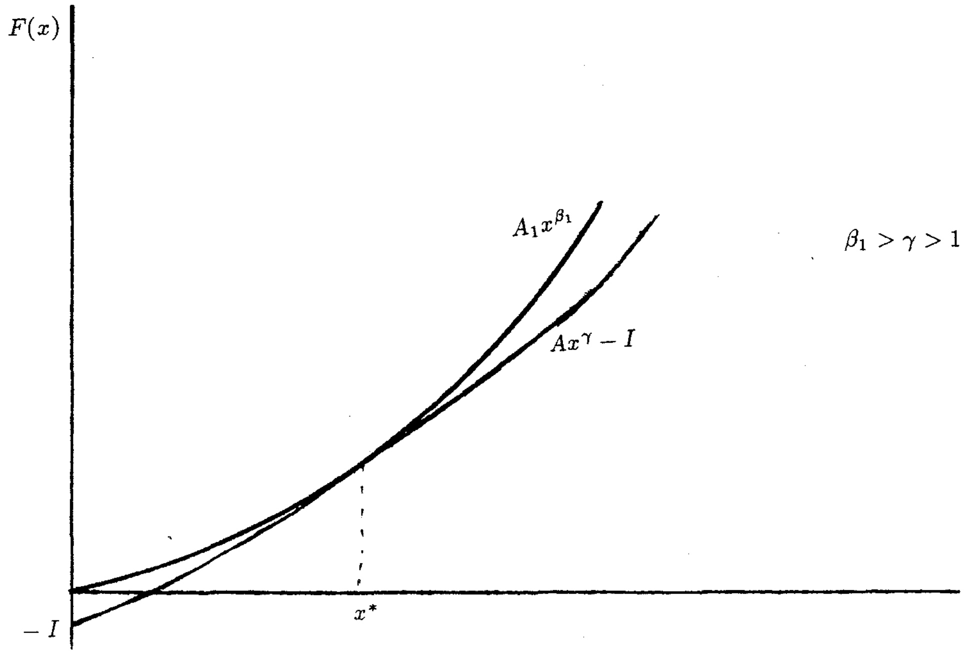

FIGURA 2

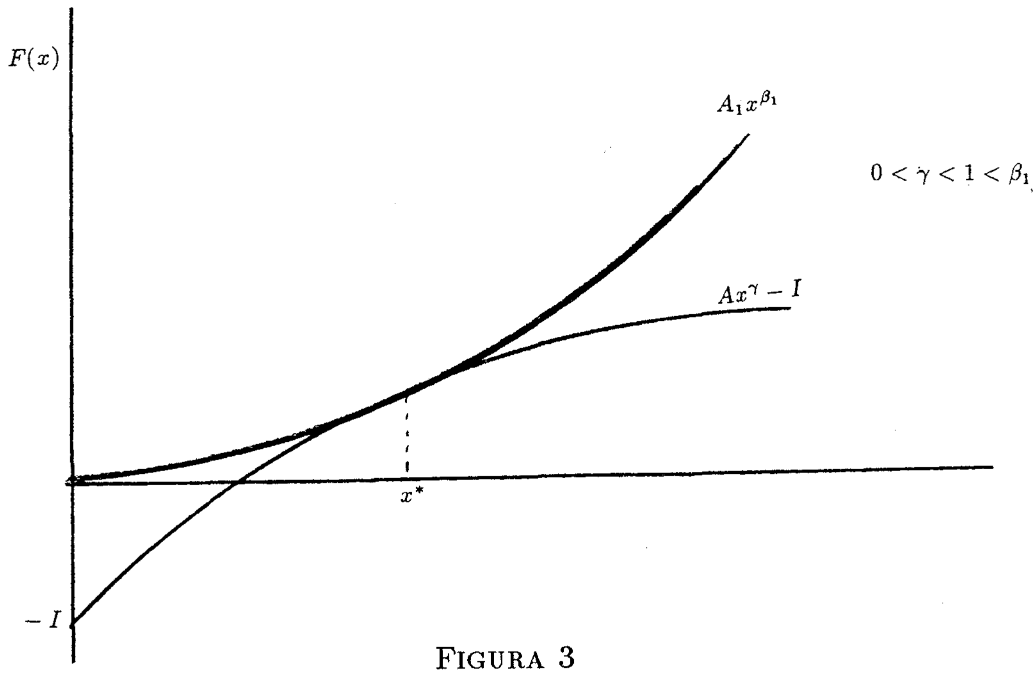

FIGURA 3

stocastico descritto dalle (11)–(12). Esso conduce, mediante applicazione dell'equazione di Bellmann, all'equazione differenziale

$$\varrho\Omega(x) = \max_u \left(f(x,u) + \Omega'(x)g(x,u) + \frac{1}{2}\sigma^2(x,u)\Omega''(x) \right)$$

oppure

$$\varrho J(x) = \max_u \left(f(x,u) + J'(x)g(x,u) + \frac{1}{2}\sigma^2(x,u)J''(x) \right)$$

che è lo stesso essendo I ininfluente rispetto alla massimizzazione. Concentrandoci sul secondo membro dell'equazione e in base alle (15)–(17) si ottiene

$$u^* = \frac{a(x) + \vartheta(x)J'(x)}{2(x)b}$$

che, sostituendo, dà luogo a

$$\begin{aligned} -\varrho J(x) + \frac{a^2 + a\vartheta J'(x)}{2b} - \frac{a^2 b + b\vartheta^2 \left[J'(x)\right]^2 + 2ab\vartheta J'(x)}{4b^2} \\ + J'(x)\left(\eta x + \frac{a\vartheta + \vartheta^2 J'(x)}{2b}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 J''(x) = 0 \end{aligned} \tag{18}$$

in cui sono stati omessi, per semplicità, gli argomenti per tutte le funzioni ad eccezione di $J(x)$.

La soluzione di questa equazione differenziale è nota, perché è imposta, dovendo essere $J(x) = Ax^\gamma$. La (18) non è allora un'equazione differenziale ma un'equazione polinomiale in cui sono incogniti il valore di A e i gradi delle funzioni $a(x)$, $b(x)$, $\eta(x)$, $\vartheta(x)$, $\sigma(x)$, che di seguito supporremo essere potenze di x. Essa diventa pertanto del tipo

$$p(x, a(x), b(x), \eta(x), \vartheta(x), \sigma(x)) = 0 \qquad \forall x > 0. \tag{18.1}$$

Indicando con $\nu(\cdot)$ il grado delle funzioni si impone che ciascun addendo nella

(18) abbia il medesimo grado γ da cui il seguente sistema di equazioni:

$$\left\{\begin{array}{l}\nu\left(\dfrac{a^2(x)}{2b(x)}\right)=\nu(x^\gamma)\\ \nu\left(\dfrac{a(x)\vartheta(x)}{2b(x)}\right)=\nu(x)\\ \nu\left(\dfrac{a^2(x)}{4b(x)}\right)=\nu(x^\gamma)\\ \nu\left(\dfrac{\vartheta^2(x)\left[J'(x)\right]^2}{4b(x)}\right)=\nu(x^\gamma)\\ \nu\left(\dfrac{a(x)\vartheta(x)J'(x)}{2b(x)}\right)=\nu(x)\\ \nu\left(\eta(x)x\right)=\nu(x)\\ \nu\left(\sigma^2(x)x^2\right)=\nu(x^2).\end{array}\right. \tag{19}$$

Dalle ultime due si ha immediatamente

$$\eta(x)=\text{costante}$$
$$\sigma(x)=\text{costante}.$$

Dalle rimanenti si ricava, omettendo per semplicità gli argomenti,

$$\begin{array}{rcl}\nu\left(\dfrac{a^2}{2b}\right)=\nu(x^\gamma) & \Longrightarrow & \nu(a)=\nu\left(x^{\gamma/2}\sqrt{2b}\right)=\nu\left(x^{\gamma/2}\right)+\nu\left(\sqrt{2b}\right)\\ \nu\left(\dfrac{a\vartheta}{2b}\right)=\nu(x) & \Longrightarrow & \nu(\vartheta)=\nu\left(x^{1-\gamma/2}\sqrt{2b}\right)=\nu\left(x^{1-\gamma/2}\right)+\nu\left(\sqrt{2b}\right)\\ \nu\left(\dfrac{a^2}{4b}\right)=\nu(x^\gamma) & \Longrightarrow & \text{verificata } \forall b\neq 0\\ \nu\left(\dfrac{\vartheta^2\left[J'\right]^2}{4b}\right)=\nu(x^\gamma) & \Longrightarrow & \text{verificata } \forall b\neq 0\\ \nu\left(\dfrac{a\vartheta J'}{2b}\right)=\nu(x) & \Longrightarrow & \text{verificata } \forall b\neq 0\end{array} \tag{20}$$

Il decisore può a questo punto scegliere una opportuna espressione di $b(x)$ secondo adeguate esigenze di rappresentazione della realtà. In base alla scelta fatta viene automaticamente determinato il grado di $a(x)$ e il grado di $\vartheta(x)$. Si supponga che l'investitore ponga $b(x) = b$. In tal modo $\nu(a) = \gamma/2$ e $\nu(\vartheta) = (1 - \gamma/2)$. In base a queste considerazioni il problema di optimal stopping si presenta espresso nel seguente modo:

$$F(x) = \max \left[\Omega(x) \, , \, \frac{1}{1+\varrho dt} \; \mathcal{E}\left(F(x+dx)\right) \right]$$

$$\Omega(x) = J(x) - I$$

$$J(x) = \max_u \mathcal{E} \int_{t_0}^{\infty} \left(a x^{\gamma/2} u - b u^2 \right) dt \qquad a, b > 0$$

$$dx = (\eta x + \vartheta x^{1-\gamma/2}\, u) dt + \sigma x dz \qquad \eta, \vartheta, \sigma > 0.$$

Applicando l'equazione di Bellmann si ricava il controllo ottimo

$$u^* = \frac{a x^{\gamma/2} + \beta x^{1-\gamma/2}\, J'(x)}{2b}.$$

La (18) diventa

$$\begin{aligned} - \varrho J(x) &+ \frac{a^2 x^{\gamma} + a\vartheta x J'(x)}{2b} - \frac{a^2 b x^{\gamma} + b\vartheta^2 x^{2-\gamma} \left[J'(x)\right]^2 + 2ab\vartheta x J'(x)}{4b^2} \\ &+ J'(x) \left(\eta x + \vartheta x^{1-\frac{\gamma}{2}} \, \frac{a x^{\gamma/2} + \vartheta x^{1-\frac{\gamma}{2}} J'(x)}{2b} \right) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 J''(x) = 0. \end{aligned}$$

Ricordando che $J(x) = Ax^{\gamma}$, si ha

$$\begin{aligned} - \varrho A x^{\gamma} &+ \frac{a^2 x^{\gamma}}{2b} - \frac{a\vartheta A \gamma x^{\gamma}}{2b} - \frac{a^2 b x^{\gamma}}{4b^2} - \frac{b\vartheta^2 A^2 \gamma^2 x^{\gamma}}{4b^2} - \frac{2ab\vartheta A\gamma x^{\gamma}}{4b^2} \\ &+ \eta A \gamma x^{\gamma} + \gamma A x^{\gamma-1} \left(\frac{a\vartheta x}{2b} + \frac{\vartheta^2 x}{2b} \right) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 A\gamma(\gamma-1) x^{\gamma-2} = 0. \end{aligned}$$

Raccogliendo infine x^{γ} si deduce che l'equazione è un'identità per quei valori di A tali che

$$-A^2 \left(\frac{b\vartheta^2\gamma^2}{4b^2} \right) + A \left(-r - \frac{2ab\vartheta\gamma}{4b^2} + \eta\gamma + \frac{\gamma\vartheta^2}{2b} + \frac{1}{2}\sigma^2\gamma(\gamma-1) \right) + \frac{a^2}{4b} = 0$$

per la quale si sceglie la radice positiva. Ora $\Omega(x)$ è determinata in funzione di γ: scelto un valore compreso tra 0 e β_1 il livello soglia che giustifica l'esercizio dell'opzione è dato da

$$x^* = \left[\frac{\beta_1}{\beta_1 - \gamma}\left(\frac{1}{A}\right) I\right]^{1/\gamma}.$$

Si noti che se $\gamma = 1$ si ritrova un risultato analogo a quello ottenuto tramite la risoluzione di un problema $CCAOS$, ossia

$$x^* = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}\left(\frac{1}{A}\right) I.$$

Si rendono necessari alcuni commenti: un problema $COSOS$ è impostato in parte arbitrariamente dalle considerazioni soggettive del decisore, in parte determinato da considerazioni di natura formale, indispensabili per ottenere la soluzione del problema prospettato. I gradi di libertà comunque lasciati al decisore sono sufficienti per una soddisfacente descrizione del fenomeno in oggetto. Egli può infatti determinare, *in primis*, la forma di $f(x,u)$ e di $g(x,u)$ in base all'impatto che la variabile u ha sul payoff finale secondo il proprio giudizio. In $f(x,u)$ la funzione $b(x)$ è libera, e, in particolare, può anche essere una costante b; $f(x,u)$ potrebbe addirittura presentare un termine additivo del tipo cx^γ: la (18) continuerebbe ad essere un'identità (con un valore diverso di A ovviamente) giacché viene semplicemente aggiunto un termine dello stesso grado degli altri termini. È possibile inoltre giocare sulle costanti η e σ nonché sui parametri a e ϑ delle funzioni $a(x)$ e $\vartheta(x)$. Infine, è lasciata al decisore la determinazione di γ, con il solo vincolo $0 < \gamma < \beta_1$.

Che cosa succede se l'investitore sceglie una forma diversa per le (15)–(17)? Si tratta di ripercorrere gli stessi passi visti poc'anzi e determinare i gradi delle funzioni lasciate indeterminate. Ad esempio scegliendo

$$\begin{aligned} f(x,u) &= a(x)u - b(x)u^\gamma \\ g(x,u) &= \eta(x)x + \vartheta(x)u \\ \sigma(x,u) &= \sigma(x)x \end{aligned}$$

si calcola agevolmente il controllo ottimo

$$u^* = \left[\frac{a(x) + \vartheta(x)J'(x)}{b(x)\gamma}\right]^{\frac{1}{\gamma-1}}.$$

Dopo qualche passaggio algebrico (e omettendo gli argomenti per le funzioni $a(x)$, $b(x)$, $\vartheta(x)$, $\eta(x)$, $\sigma(x)$) si ottiene un sistema di equazioni simile al (19) ma ora (apparentemente) più complicato:

$$\begin{cases} \nu\left(\dfrac{a\,(a+\vartheta J')^{1/(\gamma-1)}}{b^{1/(\gamma-1)}\gamma^{1/(\gamma-1)}}\right) = \nu(x^\gamma) \\ \nu\left(\dfrac{b\,(a+\vartheta J')^{\gamma/(\gamma-1)}}{b^{(\gamma/\gamma-1)}\,\gamma^{(\gamma/(\gamma-1)}}\right) = \nu(x^\gamma) \\ \nu\,(\eta x) = \nu(x) \\ \nu\left(\dfrac{\vartheta\,(a+\vartheta J'(x))^{(1/\gamma-1)}}{b^{1/(\gamma-1)}\,\gamma^{1/(\gamma-1)}}\right) = \nu(x) \\ \nu\left(\sigma^2 x^2\right) = \nu(x^2). \end{cases} \tag{21}$$

Consideriamo la prima equazione della (21):

$$\begin{aligned} \nu\left(\frac{a\,(a+\vartheta J')^{1/(\gamma-1)}}{b^{1/(\gamma-1)}\,\gamma^{1/(\gamma-1)}}\right) = \nu(x^\gamma) &\Longrightarrow \nu\left((a+\vartheta J')^{1/(\gamma-1)}\right) = \nu\left(x^{\gamma-1}\right) \\ &\Longrightarrow \nu(a) = \gamma - 1 \wedge \nu(\vartheta) = 0 \\ &\Longrightarrow \nu(b) = 0; \end{aligned}$$

la seconda e la quarta sono identicamente soddisfatte per i valori trovati, dalla terza e dalla quinta si ricava poi $\nu(\eta) = 0$ e $\nu(\sigma) = 0$. In tal modo si trova

$$f(x,u) = ax^{\gamma-1}u - bu^\gamma, \tag{22}$$

$$g(x,u) = \eta x + \vartheta u, \tag{23}$$

$$\sigma(x,u) = \sigma x \tag{24}$$

dove, si ricorda, $0 < \gamma < \beta_1$. Dalle precedenti si calcola il valore di A, quindi si ottiene

$$x^* = \left[\frac{\beta_1}{\beta_1 - \gamma}\left(\frac{1}{A}\right) I\right]^{1/\gamma} \tag{25}$$

ma, evidentemente, A assumerà un valore differente rispetto al caso precedente.

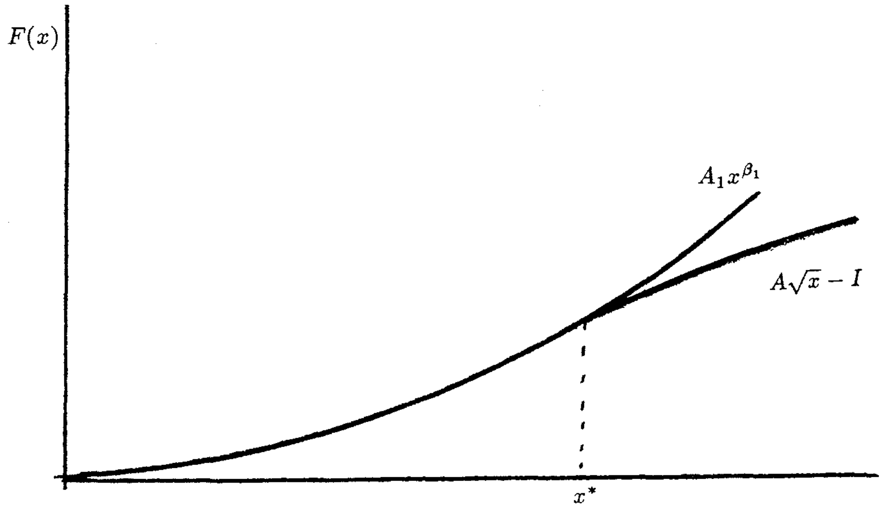

FIGURA 4

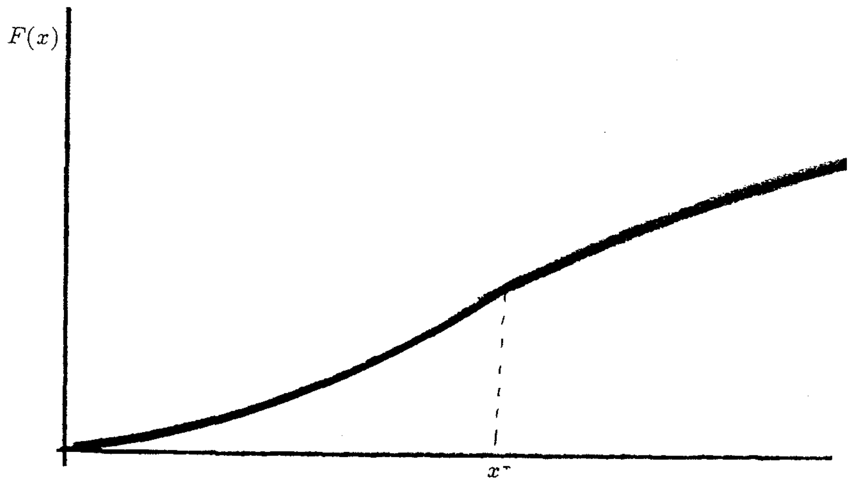

FIGURA 5

Rappresentiamo quanto descritto nei grafici di Fig. 4 e Fig. 5 ponendo $\gamma = 1/2$: si nota come la funzione $F(x)$ sia continua, derivabile e presenti un punto di flesso in corrispondenza di $x = x^*$.

Il nostro decisore è ora in grado di scegliere in modo più corretto e incisivo la sua strategia di decisione. Un'impostazione del problema sotto forma di $COSOS$ apporta miglioramenti nella descrizione dei fenomeni studiati. Il nocciolo concettuale dei miglioramenti ottenuti risiede nelle differenti ipotesi di evoluzione stocastica della variabile x. Prima dell'esercizio dell'opzione il decisore è un puro osservatore, passivo nei confronti della variabile–indice seguita. Fino a quando $x < x^*$ può essere corretto e plausibile descrivere l'andamento di x secondo un moto geometrico browniano che viene alimentato da fattori esogeni e indipendenti dalla volontà del potenziale investitore. All'atto dell'intrapresa del business l'azienda non solo investe la somma I per realizzare l'investimento, ma controlla la variabile x attraverso la propria capacità competitiva riassunta dalla variabile di controllo u. È pertanto indispensabile descrivere il moto di x come parzialmente determinato dalle azioni dell'investitore. È proprio questo il fulcro attorno al quale verte un problema $COSOS$, è questo che lo rende incompatibile con una strumentazione di tipo finanziario, in particolare la contingent claims analysis, la quale prescinde da ogni considerazione di controllabilità del prezzo dell'attività su cui è scritta l'opzione reale. Attraverso un $COSOS$ è possibile al contrario endogenizzare almeno in parte le caratteristiche evolutive del sistema di riferimento, ciò che non avrebbe neppure senso fare con la teoria delle opzioni.

4. Due brevi esempi di opzione comune una tantum

Nelle precedenti sezioni si è supposto $\lambda = 0$. Di seguito considereremo, assumendo $\lambda \neq 0$, un'opzione comune *una tantum* cioè un'opzione che è detenuta anche da altri concorrenti e la cui condivisione comporta il rischio, per il nostro decisore, di perdere la possibilità di esercizio dell'opzione a causa di un esercizio precoce da parte di un concorrente. λ rappresenta il tasso medio di arrivo di tale "evento" in un processo di Poisson. Il decisore considera la possibilità che nel prossimo intervallo di tempo dt un altro detentore eserciti, con probabilità λdt, l'opzione detenuta in comune. Per effetto di questo rischio, il valore dell'attesa dunque si riduce e l'espressione di $F(x)$ diventa

$$F(x) = \frac{1}{1+\varrho dt}\lambda dt \cdot 0 + \frac{1}{1+\varrho dt}(1-\lambda dt)\,\mathcal{E}\left(F(x+dx)\right)$$

ossia

$$\varrho dt\, F(x) = \mathcal{E}\left(dF\right)) - \lambda dt\, \mathcal{E}\left(F(x+dx)\right). \tag{26}$$

Aggiungendo e sottraendo a secondo membro la quantità $\lambda dt\, F(x)$ si ottiene

$$\varrho dt\, F(x) = \mathcal{E}\left(dF\right) - \lambda dt\, \mathcal{E}\left(dF\right) - \lambda dt\, F(x).$$

Applicando il Lemma di Ito, dividendo per dt e prendendo il limite per $dt \to 0$ si ricava l'equazione

$$\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 F''(x) + \alpha x F'(x) - (\varrho + \lambda)F(x) = 0$$

la cui soluzione è $F(x) = A_1 x^{\beta'_1}$, dove β'_1 rappresenta la radice positiva dell'equazione

$$\frac{1}{2}\sigma^2\beta(\beta-1)+\alpha\beta-(\varrho+\lambda)=0. \tag{27}$$

Il valore di x^* risulta quello dato dalla (25) in cui β'_1 sostituisce ora β_1. Si deve avere ovviamente $0<\gamma<\beta'_1$, ed essendo $\beta'_1>\beta_1$ la scelta di γ da parte del decisore risulta meno vincolante.

Si supponga che il detentore dell'opzione *una tantum* possa assicurarsi, nel caso in cui un altro concorrente intenda esercitare l'opzione, il mantenimento in vita della stessa mediante l'attivazione di un "meccanismo di isolamento" che comporta un esborso finanziario pari a $\bar{I}$. Così con probabilità λdt il decisore mantiene la detenzione dell'opzione spendendo un ammontare pari a $\bar{I}$, mentre con probabilità complementare il decisore perpetua "gratuitamente" la detenzione. In questo caso per $x<x^*$ si ha (cfr. [10])

$$F(x)=\max\left[0, c_1 x_1^{\beta}-\frac{\lambda}{\varrho}\bar{I}\right] \qquad c_1>0.$$

Supponendo $\frac{\lambda}{\varrho}\bar{I}<I$ il livello-soglia è dato da

$$x^*=\left[\frac{\beta_1}{\beta_1-\gamma}\left(\frac{1}{A}\right)\left(I-\frac{\lambda}{\varrho}\bar{I}\right)\right]^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Il moltiplicatore rimane invariato ma la base su cui esso agisce viene ridotta della quantità $\frac{\lambda}{\varrho}\bar{I}$. Ciò induce l'investitore ad intraprendere il business ad un livello di x inferiore a causa degli esborsi che egli deve sostenere nel caso un concorrente cerchi di sottrargli l'opzione. Ponendo $\gamma=1$ si ottiene un risultato analogo a quello ottenuto in [10] ove si assume che il valore del progetto V segua un semplice moto geometrico browniano senza considerare la possibilità di azione per l'investitore.

Considerazioni conclusive

In questo lavoro si è cercato di valutare un'opzione di investimento con possibilità di differimento. La prospettiva abbracciata risente della necessità di tenere in considerazione, almeno approssimativamente, gli aspetti competitivi peculiari del sistema economico di riferimento. Si è pensato di abbandonare la prospettiva di stampo prettamente finanziario perché inapplicabile o comunque meno soddifacente secondo diversi livelli di lettura del problema: tra questi vi sono, a nostro parere, una meno chiara interpretazione del processo di decisione in corso, l'assenza di considerazione delle mosse strategiche ottimali attuabili dal decisore e dei suoi meccanismi di isolamento, l'impossibilità di valutare attività che non possono essere replicate nei mercati finanziari, la stringente ipotesi di mercato perfetto richiesto dalla teoria. L'uso della programmazione dinamica stocastica in un problema di optimal stopping è estremamente intuitivo e costituisce, a nostro parere, un valido ausilio a una più chiara descrizione del problema delineando in modo esplicito i caratteri salienti del problema. L'introduzione del concetto di opzione comune, per certi versi superata in un'ottica prettamente aziendalista, viene conservata nel significato di opzione una tantum così come espressa in [12]. L'impostazione suggerita, pur con le limitazioni e le approssimazioni del caso, permette di scolpire i tratti caratteristici di un processo di decisione individuale condizionato da altre unità decisionali: il concetto di opzione, derivante dalla finanza, è estremamente utile per catturare l'idea del processo dinamico di una decisione di investimento e la sua connessione con l'osservazione continua di variabili ritenute rilevanti a fini decisionali; il concetto di opzione una tantum contribuisce a descrivere una particolare modalità di interazione competitiva, per la quale il decisore deve prendere in considerazione la possibilità che l'opzione detenuta possa essere "soffiata" da un momento all'altro da un concorrente; il passaggio, all'atto dell'esercizio dell'opzione, alla considerazione non di un mero guadagno puntuale ma di un problema di controllo ottimo stocastico consente il riaffiorare, nell'idea di investimento, dell'aspetto dinamico e competitivo che l'applicazione della teoria classica degli investimenti (attraverso la considerazione di un valore attuale atteso netto) e la teoria finanziaria (con l'idea di una corresponsione del guadagno *hic et nunc*) tendono a deprimere imponendo una stretta analogia col prezzo di un'attività finanziaria.

Il beneficio tratto da questa impostazione deve tuttavia scontare alcune limitazioni e pagare il prezzo di una maggior complessità formale con un conseguente pur parziale condizionamento nella descrizione del *milieu* economico-aziendale di riferimento.

Ulteriori sviluppi possono essere pensati nella direzione di un'estensione dei risultati visti mediante l'applicazione della Teoria dei Giochi, ciò che renderebbe ancor più trasparente l'aspetto concorrenziale che, a nostro avviso, risulta determinante nelle decisioni di carattere aziendale, in particolar modo quelle di ordine strategico. Si può inoltre pensare alla considerazione di una molteplicità di variabili che il decisore si propone di osservare e sulle quali egli intenda basare la propria regola di decisione. Ciò complica ulteriormente il problema rendendolo di difficile gestione, almeno conservando l'impostazione qui seguita. L'applicazione del Lemma di Ito nella regione di attesa conduce infatti ad una equazione alle derivate parziali risolubile solo numericamente con metodi studiati *ad hoc* per il problema in oggetto.

BIBLIOGRAFIA

[1] Arnold, L., *Stochastic Differential Equations: Theory and Applications*, J. Wiley & Sons, New York , 1974.

[2] Bertsekas, D. P., *Dynamic Programming: Deterministic and Stochastic Models*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1987.

[3] Buttignon, F., *La strategia aziendale e il valore economico del capitale*, Cedam, Padova, 1990.

[4] Dixit, A., *Investment and Hysteresis*, Journal of Economic Perspectives **6** (1992), 107–132.

[5] Dixit, A., *Optimization in Economic Theory*, Oxford University Press, Oxford, 1990.

[6] Dixit, A. K. e, Pindyck, R. S., *Investment under Uncertainty*, Princeton University Press, Princeton, 1994.

[7] Donna, G., *La valutazione economica delle strategie d'impresa*, Giuffrè, Milano, 1992.

[8] Gozzi, A. (a cura di), *La definizione e la valutazione delle strategie aziendali: criteri, metodi, esperienze*, ETAS Libri, Milano, 1991.

[9] Intriligator, M. D., *Mathematical Optimization and Economic Theory*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1971.

[10] Kamien, M. I. e, Schwartz, N. L., *Dynamic optimization: the calculus of variations and optimal control in economics and management*, North-Holland Publishing Company, New York, 1991.

[11] Kester, W. C., *Today's options for tomorrow's growth*, Harvard Business Review (1984), 153–160, March/April.

[12] Magni, C. A., *Repeatable and una tantum real options: a dynamic approach*, Materiali di discussione (1996), Università di Modena.

[13] Mc Donald, R. e Siegel, D., *The value of waiting to invest*, Quarterly Journal of Economics **101** (1986), 707–727.

[14] Pindyck, R. S., *Irreversibility, Uncertainty, and Investment*, Journal of Economic Literature **29** (1991), 1110–1148.

[15] Porter, M., *Competitive Strategy*, The Free Press, New York, 1980.

[16] Sethi, S. P. e Thompson, G. L., *Simple models in stochastic production planning*, in Applied Stochastic Control in Econometrics and Management Science (A. Bensoussan et al., eds.), North-Holland Publishing Company, 1981, pp. 295–304.

[17] Širjaev, A. N., *Probability*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, New York, 1984.

[18] Takayama, A., *Mathematical Economics*, second edition, Cambridge University Press, 1985.

[19] Trigeorgis, L. G., *Valuing Real Investment Opportunities: An Options Approach to Strategic Capital Budgeting*, Doctoral Thesis, Harvard University, Harvard, 1986.
[20] Whittle, P., *Optimization Over Time*, vol. II, John Wiley & Sons Ltd., 1983.

INVESTMENT REAL OPTIONS AND COMPETITIVE INTERACTION: STOCHASTIC DYNAMIC PROGRAMMING IN OPTIMAL STOPPING

SUMMARY

This paper deals with real options which are studied from a dynamic optimization perspective rather than a financial approach. We evaluate options to defer an investment as an optimal stopping problem, which incorporates a stochastic optimal control problem. The latter expresses the capability of the investor to affect, at least partially, the payoff from the imvestment. We formalize the problem so as to satisfy the standard boundary conditions of an optimal stopping problem and to give it adequate economic significance. The importance of the concept of shared options is restricted to cases in which a competitor snatches away the option held by the decision-maker.

1. Maria Cristina Marcuzzo [1985] "Yoan Violet Robinson (1903-1983)", pp. 134
2. Sergio Lugaresi [1986] "Le imposte nelle teorie del sovrappiù", pp. 26
3. Massimo D'Angelillo e Leonardo Paggi [1986] "PCI e socialdemocrazie europee. Quale riformismo?", pp. 158
4. Gian Paolo Caselli e Gabriele Pastrello [1986] "Un suggerimento hobsoniano su terziario ed occupazione: il caso degli Stati Uniti 1960/1983", pp. 52
5. Paolo Bosi e Paolo Silvestri [1986] "La distribuzione per aree disciplinari dei fondi destinati ai Dipartimenti, Istituti e Centri dell'Università di Modena: una proposta di riforma", pp. 25
6. Marco Lippi [1986] "Aggregations and Dynamic in One-Equation Econometric Models", pp. 64
7. Paolo Silvestri [1986] "Le tasse scolastiche e universitarie nella Legge Finanziaria 1986", pp. 41
8. Mario Forni [1986] "Storie familiari e storie di proprietà. Itinerari sociali nell'agricoltura italiana del dopoguerra", pp. 165
9. Sergio Paba [1986] "Gruppi strategici e concentrazione nell'industria europea degli elettrodomestici bianchi", pp. 56
10. Nerio Naldi [1986] "L'efficienza marginale del capitale nel breve periodo", pp. 54
11. Fernando Vianello [1986] "Labour Theory of Value"; pp. 31
12. Piero Ganugi [1986] "Risparmio forzato e politica monetaria negli economisti italiani tra le due guerre", pp. 40
13. Maria Cristina Marcuzzo e Annalisa Rosselli [1986] "The Theory of the Gold Standard and Ricardo's Standard Comodity", pp. 30
14. Giovanni Solinas [1986] "Mercati del lavoro locali e carriere di lavoro giovanili", pp. 66
15. Giovanni Bonifati [1986] "Saggio dell'interesse e domanda effettiva. Osservazioni sul cap. 17 della General Theory", pp. 42
16. Marina Murat [1986] "Betwin old and new classical macroeconomics: notes on Lejonhufvud's notion of full information equilibrium", pp. 20
17. Sebastiano Brusco e Giovanni Solinas [1986] "Mobilità occupazionale e disoccupazione in Emilia Romagna", pp. 48
18. Mario Forni [1986] "Aggregazione ed esogeneità", pp. 13
19. Sergio Lugaresi [1987] "Redistribuzione del reddito, consumi e occupazione", pp. 17
20. Fiorenzo Sperotto [1987] "L'immagine neopopulista di mercato debole nel primo dibattito sovietico sulla pianificazione", pp. 34
21. M. Cecilia Guerra [1987] "Benefici tributari nel regime misto per i dividendi proposto dalla commissione Sarcinelli: una nota critica", pp. 9
22. Leonardo Paggi [1987] "Contemporary Europe and Modern America: Theories of Modernity in Comparative Perspective", pp. 38
23. Fernando Vianello [1987] "A Critique of Professor Goodwin's 'Critique of Sraffa'", pp. 12

24. Fernando Vianello [1987] "Effective Demand and the Rate of Profits. Some Thoughts on Marx, Kalecki and Sraffa", pp. 41

25. Anna Maria Sala [1987] "Banche e territorio. Approccio ad un tema geografico-economico", pp. 40

26. Enzo Mingione e Giovanni Mottura [1987] "Fattori di trasformazione e nuovi profili sociali nell'agricoltura italiana: qualche elemento di discussione", pp. 36

27. Giovanna Procacci [1988] "The State and Social Control in Italy During the First World War", pp. 18

28. Massimo Matteuzzi e Annamaria Simonazzi [1988] "Il debito pubblico", pp. 62

29. Maria Cristina Marcuzzo (a cura di) [1988] "Richard F. Kahn. A discipline of Keynes", pp. 118

30. Paolo Bosi [1988] "MICROMOD. Un modello dell'economia italiana per la didattica della politica fiscale", pp. 34

31. Paolo Bosi [1988] "Indicatori della politica fiscale. Una rassegna e un confronto con l'aiuto di MICROMOD", pp. 25

32. Giovanna Procacci [1988] "Protesta popolare e agitazioni operaie in Italia 1915-1918", pp. 45

33. Margherita Russo [1988] "Distretto Industriale e servizi. Uno studio dei trasporti nella produzione e nella vendita delle piastrelle", pp. 157

34. Margherita Russo [1988] "The effect of technical change on skill requirements: an empirical analysis", pp. 28

35. Carlo Grillenzoni [1988] "Identification, estimations of multivariate transfer functions", pp. 33

36. Nerio Naldi [1988] ""Keynes' concept of capital", pp. 40

37. Andrea Ginzburg [1988] "locomotiva Italia?", pp. 30

38. Giovanni Mottura [1988] "La 'persistenza' secolare. Appunti su agricoltura contadina ed agricoltura familiare nelle società industriali", pp. 40

39. Giovanni Mottura [1988] "L'anticamera dell'esodo. I contadini italiani della 'restaurazione contrattuale' fascista alla riforma fondiaria", pp. 40

40. Leonardo Paggi [1988] "Americanismo e riformismo. La socialdemocrazia europea nell'economia mondiale aperta", pp. 120

41. Annamaria Simonazzi [1988] "Fenomeni di isteresi nella spiegazione degli alti tassi di interesse reale", pp. 44

42. Antonietta Bassetti [1989] "Analisi dell'andamento e della casualità della borsa valori", pp. 12

43. Giovanna Procacci [1989] "State coercion and worker solidarity in Italy (1915-1918): the moral and political content of social unrest", pp. 41

44. Carlo Alberto Magni [1989] "Reputazione e credibilità di una minaccia in un gioco bargaining", pp. 56

45. Giovanni Mottura [1989] "Agricoltura familiare e sistema agroalimentare in Italia", pp. 84

46. Mario Forni [1989] "Trend, Cycle and 'Fortuitous cancellation': a Note on a Paper by Nelson and Plosser", pp. 4

47. Paolo Bosi , Roberto Golinelli , Anna Stagni [1989] "Le origini del debito pubblico e il costo della stabilizzazione", pp. 26

48. Roberto Golinelli [1989] "Note sulla struttura e sull'impiego dei modelli macroeconometrici", pp. 21

49. Marco Lippi [1989] "A Shorte Note on Cointegration and Aggregation", pp. 11

50. Gian Paolo Caselli e Gabriele Pastrello [1989] "The Linkage between Tertiary and Industrial Sector in the Italian Economy: 1951-1988. From an External Dependence to an International One", pp. 40

51. Gabriele Pastrello [1989] "Francois quesnay: dal Tableau Zig-zag al Tableau Formule: una ricostruzione", pp. 48

52. Paolo Silvestri [1989] "Il bilancio dello stato", pp. 34

53. Tim Mason [1990] "Tre seminari di storia sociale contemporanea", pp. 26

54. Michele Lalla [1990] "The Aggregate Escape Rate Analysed throught the Queueing Model", pp. 23

55. Paolo Silvestri [1990] "Sull'autonomia finanziaria dell'università", pp. 11

56. Paola Bertolini, Enrico Giovannetti [1990] "Uno studio di 'filiera' nell'agroindustria. Il caso del Parmigiano Reggiano", pp. 164

57. Paolo Bosi, Roberto Golinelli, Anna Stagni [1990] "Effetti macroeconomici, settoriali e distributivi dell'armonizzazione dell'IVA", pp. 24

58. Michele Lalla [1990] "Modelling Employment Spells from Emilia Labour Force Data", pp. 18

59. Andrea Ginzburg [1990] "Politica Nazionale e commercio internazionale", pp. 22

60. Andrea Giommi [1990] "La probabilità individuale di risposta nel trattamento dei dati mancanti", pp. 13

61. Gian Paolo Caselli e Gabriele Pastrello [1990] "The service sector in planned economies. Past experiences and future prospectives", pp. 32

62. Giovanni Solinas [1990] "Competenze, grandi industrie e distretti industriali,. Il caso Magneti Marelli", pp. 23

63. Andrea Ginzburg [1990] "Debito pubblico, teorie monetarie e tradizione civica nell'Inghilterra del Settecento", pp. 30

64. Mario Forni [1990] "Incertezza, informazione e mercati assicurativi: una rassegna", pp. 37

65. Mario Forni [1990] "Misspecification in Dynamic Models", pp. 19

66. Gian Paolo Caselli e Gabriele Pastrello [1990] "Service Sector Growth in CPE's: An Unsolved Dilemma", pp. 28

67. Paola Bertolini [1990] "La situazione agro-alimentare nei paesi ad economia avanzata", pp. 20

68. Paola Bertolini [1990] "Sistema agro-alimentare in Emilia Romagna ed occupazione", pp. 65

69. Enrico Giovannetti [1990] "Efficienza ed innovazione: il modello "fondi e flussi" applicato ad una filiera agro-industriale", pp. 38

70. Margherita Russo [1990] "Cambiamento tecnico e distretto industriale: una verifica empirica", pp. 115

71. Margherita Russo [1990] "Distretti industriali in teoria e in pratica: una raccolta di saggi", pp. 119

72. Paolo Silvestri [1990] " La Legge Finanziaria. Voce dell'enciclopedia Europea Garzanti", pp. 8

73. Rita Paltrinieri [1990] "La popolazione italiana: problemi di oggi e di domani", pp. 57

74. Enrico Giovannetti [1990] "Illusioni ottiche negli andamenti delle Grandezze distributive: la scala mobile e l''appiattimento' delle retribuzioni in una ricerca", pp. 120

75. Enrico Giovannetti [1990] "Crisi e mercato del lavoro in un distretto industriale: il bacino delle ceramiche. Sez I", pp. 150

76. Enrico Giovannetti [1990] " Crisi e mercato del lavoro in un distretto industriale: il bacino delle ceramiche. Sez. II", pp. 145

78. Antonietta Bassetti e Costanza Torricelli [1990] "Una riqualificazione dell'approccio bargaining alla selezioni di portafoglio", pp. 4

77. Antonietta Bassetti e Costanza Torricelli [1990] "Il portafoglio ottimo come soluzione di un gioco bargaining", pp. 15

79. Mario Forni [1990] "Una nota sull'errore di aggregazione", pp. 6

80. Francesca Bergamini [1991] "Alcune considerazioni sulle soluzioni di un gioco bargaining", pp. 21

81. Michele Grillo e Michele Polo [1991] "Political Exchange and the allocation of surplus: a Model of Two-party competition", pp. 34

82. Gian Paolo Caselli e Gabriele Pastrello [1991] "The 1990 Polish Recession: a Case of Truncated Multiplier Process", pp. 26

83. Gian Paolo Caselli e Gabriele Pastrello [1991] "Polish firms: Pricate Vices Pubblis Virtues", pp. 20

84. Sebastiano Brusco e Sergio Paba [1991] "Connessioni, competenze e capacità concorrenziale nell'industria della Sardegna", pp. 25

85. Claudio Grimaldi, Rony Hamaui, Nicola Rossi [1991] "Non Marketable assets and hauseholds' Portfolio Choice: a Case of Study of Italy", pp. 38

86. Giulio Righi, Massimo Baldini, Alessandra Brambilla [1991] "Le misure degli effetti redistributivi delle imposte indirette: confronto tra modelli alternativi", pp. 47

87. Roberto Fanfani, Luca Lanini [1991] "Innovazione e servizi nello sviluppo della meccanizzazione agricola in Italia", pp. 35

88. Antonella Caiumi e Roberto Golinelli [1992] "Stima e applicazioni di un sistema di domanda Almost Ideal per l'economia italiana", pp. 34

89. Maria Cristina Marcuzzo [1992] "La relazione salari-occupazione tra rigidità reali e rigidità nominali", pp. 30

90. Mario Biagioli [1992] "Employee financial participation in enterprise results in Italy", pp. 50

91. Mario Biagioli [1992] "Wage structure, relative prices and international competitiveness", pp. 50

92. Paolo Silvestri e Giovanni Solinas [1993] "Abbandoni, esiti e carriera scolastica. Uno studio sugli studenti iscritti alla Facoltà di Economia e Commercio dell'Università di Modena nell'anno accademico 1990/1991", pp. 30

93. Gian Paolo Caselli e Luca Martinelli [1993] "Italian GPN growth 1890-1992: a unit root or segmented trend representatin?", pp. 30

94. Angela Politi [1993] "La rivoluzione fraintesa. I partigiani emiliani tra liberazione e guerra fredda, 1945-1955", pp. 55

95. Alberto Rinaldi [1993] "Lo sviluppo dell'industria metalmeccanica in provincia di Modena: 1945-1990", pp. 70

96. Paolo Emilio Mistrulli [1993] "Debito pubblico, intermediari finanziari e tassi d'interesse: il caso italiano", pp. 30

97. Barbara Pistoresi [1993] "Modelling disaggregate and aggregate labour demand equations. Cointegration analysis of a labour demand function for the Main Sectors of the Italian Economy: 1950-1990", pp. 45

98. Giovanni Bonifati [1993] "Progresso tecnico e accumulazione di conoscenza nella teoria neoclassica della crescita endogena. Una analisi critica del modello di Romer", pp. 50

99. Marcello D'Amato e Barbara Pistoresi [1994] "The relationship(s) among Wages, Prices, Unemployment and Productivity in Italy", pp. 30

100. Mario Forni [1994] "Consumption Volatility and Income Presistence in the Permanent Income Model", pp. 30

101. Barbara Pistoresi [1994] "Using a VECM to characterise the relative impostance of permanent and transitority components", pp. 28

102. Gian Paolo Caselli and Gabriele Pastrello [1994] "Polish recovery form the slump to an old dilemma", pp. 20

103. Sergio Paba [1994] "Imprese visibili, accesso al mercato e organizzazione della produzione", pp. 20

104. Giovanni Bonifati [1994] "Progresso tecnico, investimenti e capacità produttiva", pp. 30

105. Giuseppe Marotta [1994] "Credit view and trade credit: evidence from Italy", pp. 20

106. Margherita Russo [1994] "Unit of investigation for local economic development policies", pp. 25

107. Luigi Brighi [1995] "Monotonicity and the demand theory of the weak axioms", pp. 20

108. Mario Forni e Lucrezia Reichlin [1995] "Modelling the impact of technological change across sectors and over time in manufactoring", pp. 25

109. Marcello D'Amato and Barbara Pistoresi [1995] "Modellin wage growth dynamics in Italy: 1960-1990", pp. 38

110. Massimo Baldini [1995] "INDIMOD. Un modello di microsimulazione per lo studio delle imposte indirette", pp. 37

111. Paolo Bosi [1995] "Regionalismo fiscale e autonomia tributaria: l'emersione di un modello di consenso", pp. 38

112. Massimo Baldini [1995] "Aggregation Factors and Aggregation Bias in Consumer Demand", pp. 33

113. Costanza Torricelli [1995] "The information in the term structure of interest rates. Can stocastic models help in resolving the puzzle?" pp. 25

114. Margherita Russo [1995] "Industrial complex, pôle de développement, distretto industriale. Alcune questioni sulle unità di indagine nell'analisi dello sviluppo." pp. 45

115. Angelika Moryson [1995] "50 Jahre Deutschland. 1945 - 1995" pp. 21

116. Paolo Bosi [1995] "Un punto di vista macroeconomico sulle caratteristiche di lungo periodo del nuovo sistema pensionistico italiano." pp. 32

117. Gian Paolo Caselli e Salvatore Curatolo [1995] "Esistono relazioni stimabili fra dimensione ed efficienza delle istituzioni e crescita produttiva? Un esercizio nello spirito di D.C. North." pp. 11

118. Mario Forni e Marco Lippi [1995] "Permanent income, heterogeneity and the error correction mechanism." pp. 21

119. Barbara Pistoresi [1995] "Co-movements and convergence in international output. A Dynamic Principal Components Analysis" pp. 14

120. Mario Forni e Lucrezia Reichlin [1995] "Dynamic common factors in large cross-section" pp. 17

121. Giuseppe Marotta [1995] "Il credito commerciale in Italia: una nota su alcuni aspetti strutturali e sulle implicazioni di politica monetaria" pp. 20

122. Giovanni Bonifati [1995] "Progresso tecnico, concorrenza e decisioni di investimento: una analisi delle determinanti di lungo periodo degli investimenti" pp. 25

123. Giovanni Bonifati [1995] "Cambiamento tecnico e crescita endogena: una valutazione critica delle ipotesi del modello di Romer" pp. 21

124. Barbara Pistoresi e Marcello D'Amato [1995] "La riservatezza del banchiere centrale è un bene o un male? ,Effetti dell'informazione incompleta sul benessere in un modello di politica monetaria." pp. 32

125. Barbara Pistoresi [1995] "Radici unitarie e persistenza: l'analisi univariata delle fluttuazioni economiche." pp. 33

126. Barbara Pistoresi e Marcello D'Amato [1995] "Co-movements in European real outputs" pp. 20

127. Antonio Ribba [1996] "Ciclo economico, modello lineare-stocastico, forma dello spettro delle variabili macroeconomiche" pp. 31

128. Carlo Alberto Magni [1996] "Repeatable and una tantum real options a dynamic programming approach" pp. 23