

606360  
3614

\\ 263 \\

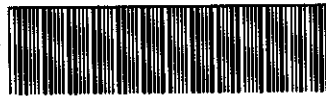
19/3/99

**Una rassegna sui metodi di stima del  
Value at Risk (VAR)**

di

Chiara Pederzoli\*  
Costanza Torricelli\*\*

Marzo 1999



Copia n. 606361

**CLL.088.263**

1 \* rassegna sui metodi di stima d

\* Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia  
Dipartimento di Economia Politica  
Via Berengario, 51  
41100 Modena (Italia)  
*e-mail: pederzoli@morgana.unimo.it*

\*\* Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia  
Dipartimento di Economia Politica  
Via Berengario, 51  
41100 Modena (Italia)  
*e-mail: torricelli@unimo.it*

## UNA RASSEGNA SUI METODI DI STIMA DEL VALUE at RISK (VaR)

### INDICE

#### Introduzione

1. Il concetto del VaR e le sue applicazioni
2. La stima del VaR
  - 2.1 La "Local Valuation"
  - 2.2 La "Full Valuation"
  - 2.3 Uno schema riassuntivo
3. Un confronto tra i metodi esistenti: i più recenti sviluppi

#### Appendice

#### Bibliografia

## Introduzione

Il Value at Risk (VaR) è un recente metodo statistico per la misurazione del rischio di un portafoglio inteso in senso lato e ne rappresenta la massima perdita attesa, su un dato orizzonte temporale e nei limiti di un predefinito livello di confidenza. I tipi di rischio che è possibile misurare con tale indice monetario sono molteplici così come molteplici sono gli ambiti di applicazione.

Il VaR è un metodo relativamente nuovo, ma è rapidamente diventato lo strumento più famoso per la misurazione e gestione del rischio. La ragione di tale successo è fondamentalmente riconducibile a tre fenomeni. In primo luogo, disastri finanziari come quello della Barings nel febbraio 1995 hanno messo in luce la necessità di disporre di uno standard per il monitoraggio delle esposizioni al rischio finanziario di portafogli complessi. In secondo luogo, la decisione della J.P.Morgan di rendere pubblici e gratuitamente disponibili nel 1994 la metodologia Riskmetrics (TM) e il relativo database ha accelerato il processo di standardizzazione. Infine, le indicazioni del Comitato di Basilea sulla supervisione bancaria che consentono l'adozione da parte delle banche - a partire dal 1998 - di modelli interni di stima del VaR per definire i requisiti minimi di capitale.

Oltre all'essere un indice monetario, e pertanto molto immediato, del rischio di un portafoglio, il VaR presenta un altro grande vantaggio rispetto alle misure tradizionali (quali ad esempio duration, convexity, delta o altre "Greeks"). Infatti tali misure catturano l'esposizione ad un solo tipo di rischio (es. rischio di tasso di interesse o rischio del sottostante), mentre il VaR è in grado di quantificare l'esposizione globale di un soggetto a varie fonti di rischio.

A fronte di una definizione concettuale semplice, l'implementazione del VaR non è affatto banale e può essere realizzata con diversi metodi, che tuttavia condividono un approccio procedurale comune.

Il presente lavoro prescinde da una discussione delle problematiche teorico-finanziarie alla base del VaR e dei relativi problemi applicativi e si propone invece di offrire una rassegna dei principali metodi di stima proposti per effettuare un confronto critico. A tal fine il lavoro è organizzato nel seguente modo. Nella prima sezione viene sinteticamente presentato il concetto di VaR e si accenna ai principali utilizzi. La seconda è dedicata alla illustrazione dei due principali metodi di stima ("local valuation" e "full valuation") e alla discussione dei problemi insiti in ciascun metodo. La terza sezione conclude tentando un confronto tra i metodi più utilizzati e accennando ai più recenti sviluppi.

## 1. Il concetto del VaR e le sue applicazioni

Il Value at Risk (VaR) è un metodo statistico di misurazione del rischio di un portafoglio in grado di sintetizzare la stima del rischio dell'intero portafoglio in un solo numero.

Il VaR riassume la massima perdita attesa, su un dato orizzonte temporale, nei limiti di un predefinito intervallo di confidenza. Più precisamente: considerando una probabilità di  $c\%$  ( $c$  è il livello di confidenza) e un periodo di  $t$  giorni, il VaR è la perdita che ci si aspetta venga ecceduta solo con una probabilità di  $(1-c)\%$  nel prossimo periodo di  $t$  giorni.

La scelta di  $c$  e  $t$  è soggettiva:

- il livello di confidenza  $c$  definisce il grado di protezione dal rischio di movimenti avversi dei fattori di mercato. I valori tipici per  $c$  sono 99%, 97,5%, o 95%: la scelta può essere rilevante o meno a seconda dell'uso che si intende fare del VaR, cioè a seconda che il VaR venga utilizzato come misura assoluta del rischio sostenuto o come unità di confronto (ad esempio confronto di rischiosità tra portafogli diversi), nel qual caso  $c$  diventa solo un fattore scalare. Naturalmente, più ampio è il livello di confidenza  $c$  adottato, maggiore è la capacità del VaR di contenere le perdite (nel senso che risulta meno probabile eccedere la perdita massima stimata), ma minore è il contributo del VaR in termini informativi, dato che viene esclusa una gamma più ristretta di valori;
- i periodi normalmente adottati sono di 1, 2 o 10 giorni, oppure un mese. Ipotesi sottostante è che la composizione del portafoglio rimanga costante durante il periodo considerato; quindi la scelta dell'orizzonte temporale deve dipendere dalla frequenza con cui il portafoglio viene sottoposto a movimentazioni e dal periodo necessario per la liquidazione del portafoglio.

La definizione del VaR si può illustrare facilmente da un punto di vista grafico. E' necessario a questo scopo disporre dei dati relativi ad una distribuzione di probabilità delle variazioni future del valore del portafoglio (profitti e perdite future). Supponiamo per il momento che la variazione del portafoglio,  $\Delta W$ , sia definita con riferimento al valore iniziale dello stesso, ovvero:

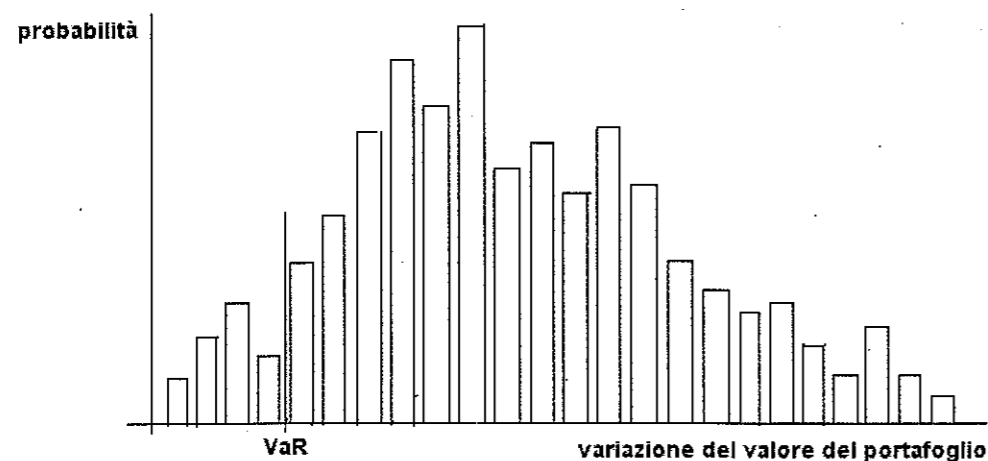
$$\Delta W = W_0 - W_t \quad (1.1)$$

dove:

$W_0$  è il valore iniziale del portafoglio

$W_t$  è il valore del portafoglio alla fine dell'orizzonte temporale prescelto.

Fig. 1.1 Distribuzione di probabilità della variazione del valore del portafoglio  $\Delta W$ .



Nella figura 1.1, partendo da sinistra (perdite peggiori), si sommano le probabilità dei singoli valori fino a raggiungere una probabilità cumulata del  $(1-c)\%$ , che determina il VaR, come valore che separa le perdite considerate 'nella norma' da quelle 'eccezionali'. In pratica, indicando con  $W^*$  il valore minimo del portafoglio (alla fine dell'orizzonte temporale) al livello di confidenza scelto, il VaR è dato dalla variazione  $\Delta W^* = W_0 - W^*$ , definita da tale valore critico.

Formalmente, il VaR è quel valore tale che:

$$1 - c = P(\Delta W \leq VaR) \quad (1.2)$$

La 1.1 e la 1.2 congiuntamente definiscono il cosiddetto VaR assoluto. Tuttavia esiste una definizione alternativa del VaR, nella quale la variazione del portafoglio viene valutata rispetto al valore atteso dello stesso piuttosto che al valore iniziale. La formalizzazione del concetto è la medesima, purché si interpreti  $\Delta W$  come  $\Delta W = E(W) - W_t$ .

Il VaR relativo diventa quindi:

$$VaR = E(W) - W^* \quad (1.3)$$

e misura il rischio relativo alla realizzazione di performances inferiori alle aspettative.

Ovviamente se il valore atteso del portafoglio  $E(W)$  è uguale al valore iniziale, cioè se si ipotizza che la variazione attesa del valore del portafoglio sia nulla, il VaR relativo al valore atteso risulta uguale al VaR assoluto.

Volendo esprimere il VaR in funzione del tasso di rendimento  $R$  del portafoglio sull'orizzonte temporale prescelto, è sufficiente richiamare la relazione tra  $W_t$  ed  $R$ :

$$W = W_0(1+R) \quad (1.4)$$

da cui segue che:

$$W^* = W_0(1+R^*) \quad (1.5),$$

dove  $R^*$  è il rendimento minimo del portafoglio al livello di confidenza scelto.

Il VaR diventa quindi, nelle due diverse accezioni:

$$VaR \text{ relativo} = E(W) - W^* = W^0[E(R) - R^*] \quad (1.6)$$

$$VaR \text{ assoluto} = W^0 - W^* = -R^*W^0 \quad (1.7).$$

Considerando ora una funzione di densità di probabilità continua  $f(R)$ , e scelto un livello di confidenza  $c$ ,  $R^*$  viene determinato in modo tale che:

$$c = \int_{R^*}^{+\infty} f(R) dR \quad (1.8),$$

o analogamente:

$$1 - c = \int_{-\infty}^{R^*} f(R) dR \quad (1.9).$$

Per quanto riguarda l'utilizzo, teoricamente il VaR può essere applicato a tutti i tipi di rischio finanziario, che viene generalmente suddiviso in cinque categorie:

- *Rischio di mercato*, cioè il rischio di perdite dovute ai movimenti di mercato;
- *Rischio di credito*, cioè il rischio relativo alla possibilità di insolvenza della controparte;
- *Rischio operativo*, cioè il rischio derivante da errori umani o inadeguatezza dei sistemi utilizzati;
- *Rischio di liquidità*, che può assumere due forme: il rischio di liquidità di mercato (market/product liquidity) si verifica quando la transazione non può essere condotta ai prezzi di mercato prevalenti a causa dell'insufficienza dell'attività di mercato; il rischio di liquidità di capitale (cash flow/funding liquidity) corrisponde all'incapacità di ottenere fondi per rispettare le obbligazioni di pagamento;
- *Rischio legale*, cioè il rischio che la controparte non abbia l'autorità legale di intraprendere la transazione.

Il VaR può quindi fornire una misura complessiva del rischio a cui un soggetto (ad esempio una banca) è sottoposto: di fatto il VaR, nato come strumento per la valutazione del rischio di mercato, viene tuttora utilizzato prevalentemente a questo scopo. In particolare, il VaR prende in considerazione più fonti del rischio di mercato, quali:

- *Rischio di interesse* (volatilità del tasso d'interesse);
- *Rischio di cambio* (volatilità del tasso di cambio);
- *Rischio su equity* (volatilità dei prezzi delle azioni);
- *Rischio su commodity* (volatilità dei prezzi delle materie prime);

Il VaR permette di sintetizzare in un unico valore tutti i rischi di mercato che nascono dalla detenzione di diversi strumenti finanziari. Questa valutazione integrata del rischio tiene conto dei benefici che derivano dalla diversificazione: infatti il cosiddetto 'VaR diversificato' si calcola sulla base delle relazioni esistenti tra le diverse fonti di rischio a cui il portafoglio è esposto, quantificate dai coefficienti di correlazione. Si può anche parlare di 'VaR non diversificato' di un portafoglio, dato semplicemente dalla somma dei VaR sui singoli fattori di rischio che incidono sul portafoglio.

L'ipotesi sottostante è che i coefficienti di correlazione siano uguali a 1, cioè che ci sia perfetta correlazione tra i fattori di rischio; in questo caso la diversificazione non dà alcun beneficio. Questa ipotesi è però nella maggior parte dei casi inaccettabile: normalmente il rischio di portafoglio misurato a livello globale risulta inferiore rispetto alla somma dei rischi relativi ai singoli fattori di rischio.

Il VaR ha molteplici possibilità di utilizzazione: esso può essere strumento informativo, strumento di allocazione delle risorse e definizione dei limiti operativi, strumento di valutazione delle performances (aggiustate per il rischio), strumento per la definizione dei requisiti di capitale a scopo di regolamentazione bancaria.

Quest'ultima applicazione ha assunto una notevole importanza, dato che, secondo le indicazioni del comitato di Basilea, a partire dal 1998 le banche possono autonomamente definire i propri requisiti di capitale a fronte del rischio di mercato, sulla base dei propri modelli interni di stima del VaR. Di fatto la libertà della banca è limitata da un lato dall'imposizione di alcuni vincoli che il modello deve rispettare, dall'altro dalla necessità che tale modello venga approvato dall'autorità di regolamentazione. L'approvazione si basa sull'applicazione di test che misurano l'accuratezza delle stime prodotte dal modello: si tratta fondamentalmente di test basati sul tasso di fallimento del modello su un periodo di osservazione (di 250 giorni), cioè sulla percentuale dei casi in cui le perdite superano il VaR (eccezioni), da confrontare con la percentuale adottata a priori nel modello (1-c).<sup>1</sup>

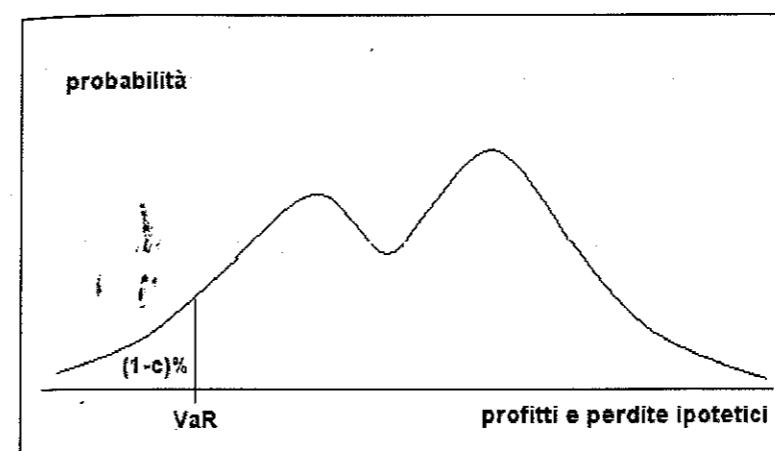
## 2. La stima del VaR

Esistono diversi metodi per il calcolo del VaR, caratterizzati da diverse ipotesi sottostanti e da diverse procedure; si può comunque individuare uno schema di base, comune a tutti i metodi, che prevede:

1. individuazione dei fattori di rischio rilevanti, cioè dei fattori di mercato che influiscono sul valore del portafoglio;
2. stima della distribuzione di probabilità dei rendimenti dei fattori di rischio;
3. determinazione della distribuzione di probabilità dei rendimenti del portafoglio in termini di profitti e perdite sulla base delle stime al punto '2';
4. determinazione del VaR come massima perdita al c% di probabilità.

<sup>1</sup> Un elemento importante per l'applicabilità del VaR è rappresentato dai test per l'accuratezza delle stime del VaR. Data la natura introduttiva del presente lavoro, si rimanda a Lopez (1997 e 1998) per una trattazione approfondita del problema.

Fig. 2.1 Determinazione grafica del VaR



L'obiettivo comune a tutti i metodi è quello di ottenere una stima della distribuzione futura del rendimento di portafoglio o meglio della variazione del valore del portafoglio.

I metodi di calcolo del VaR si possono distinguere prima di tutto in due tipologie: metodi basati sulla 'local valuation' (metodi analitici) e metodi basati sulla 'full valuation' (metodi di simulazione).

### 2.1 La "Local valuation"

Il metodo rappresentativo di questa tipologia, quello cioè che normalmente viene utilizzato, è il cosiddetto metodo 'Delta-Normal'. Esso si basa su due ipotesi fondamentali:

- normalità della distribuzione dei rendimenti dei fattori di rischio;
- linearità del rendimento di portafoglio rispetto ai fattori di rischio.

La combinazione delle due ipotesi implica la normalità del rendimento del portafoglio. Inoltre si ipotizza normalmente che i rendimenti dei fattori di rischio, e di conseguenza il rendimento del portafoglio, abbiano media nulla.

Le ipotesi vengono sfruttate per semplificare la misurazione del VaR, infatti, sotto l'ipotesi di

normalità, il VaR a un giorno si può calcolare come<sup>2</sup>:

$$VaR = \alpha \sigma_p W_0 \quad (2.1)$$

$\alpha$  = valore critico derivato dalle tavole della  $N(0,1)$ , che separa un'area di probabilità di c% alla sua destra dall'area complementare di (1-c)% alla sua sinistra;

<sup>2</sup> Per la derivazione della (2.1) si veda l'Appendice.

$\sigma$  = deviazione standard del rendimento del portafoglio;

$W_0$  = valore iniziale del portafoglio, cioè valore investito.

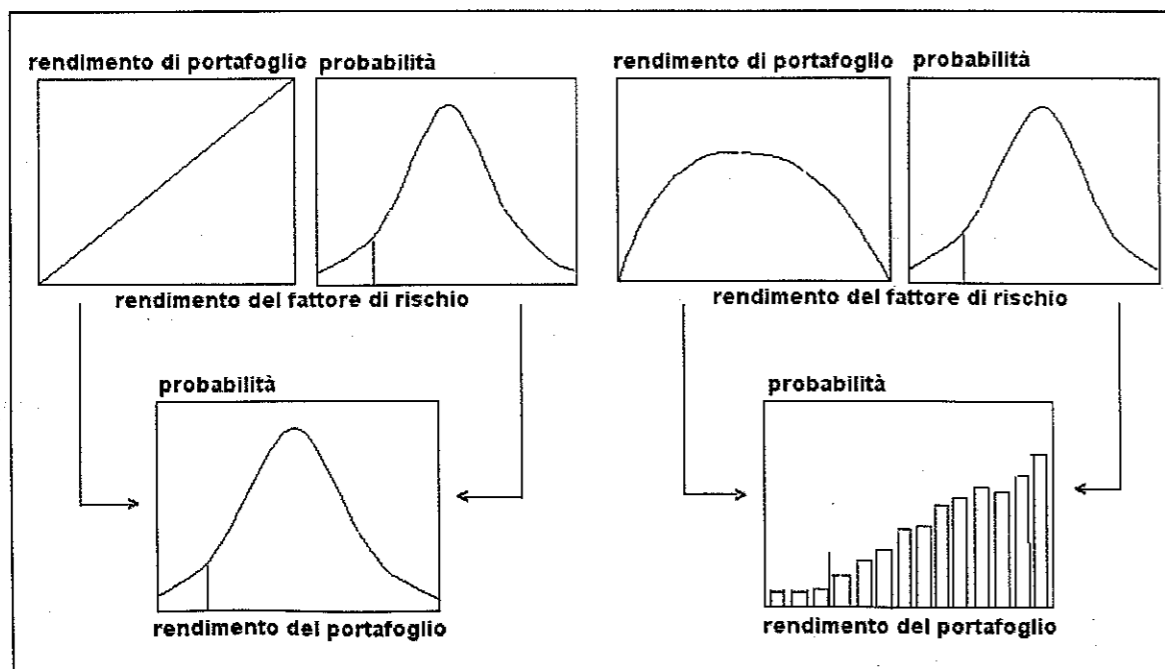
Intuitivamente, la 2.1 afferma che, se i rendimenti di portafoglio hanno una distribuzione normale  $N(0, \sigma_p^2)$ , il parametro  $\sigma_p^2$  è sufficiente a descrivere tale distribuzione, e il rischio gravante sul portafoglio viene rappresentato sinteticamente con la deviazione standard caratterizzante tale distribuzione. E' opportuno ricordare che la 2.1 vale nell'ipotesi di orizzonte temporale di un giorno (ovvero  $t=1$ ), in caso contrario il lato destro della 2.1 deve esser moltiplicato per  $\sqrt{t}$ . In realtà tale estensione della 2.1 è corretta solo nell'ipotesi di incorrelazione temporale dei rendimenti, che però appare accettabile nel breve periodo

L'ipotesi di normalità dei rendimenti dei fattori di rischio costituisce naturalmente un'approssimazione della realtà: si è infatti riscontrato che le variabili finanziarie hanno spesso una distribuzione, detta 'leptokurtotic distribution', caratterizzata da code più spesse (fat tails) e da un picco centrale più accentuato (thin waist) rispetto alla distribuzione normale. Ciò significa che l'approssimazione a una normale tende a sottostimare la probabilità dei valori di coda, che sono quelli rilevanti ai fini della stima del VaR.

L'ipotesi di linearità della variazione del valore di portafoglio rispetto alle variazioni dei fattori di rischio implica che, data una distribuzione normale dei rendimenti dei fattori di rischio, anche il rendimento di portafoglio avrà una distribuzione normale, e la sua varianza, è sufficiente, a rappresentare il rischio del portafoglio.

Fig. 2.2 (a) Esposizione lineare

Fig. 2.2 (b) Esposizione non lineare



Utilizzando la 2.1 non è necessario determinare tutti i valori della distribuzione di probabilità dei rendimenti del portafoglio, ma, assumendo che questa sia una normale, è sufficiente determinare la varianza che la caratterizza (quindi la deviazione standard che utilizzo nella formula).

Il rendimento di un portafoglio dal momento  $t$  al momento  $t+1$  è una combinazione lineare dei rendimenti dei singoli  $n$  titoli che compongono il portafoglio stesso:

$$R_{p,t+1} = \sum_{i=1}^n w_{i,t} R_{i,t+1} \quad (2.2)$$

dove  $R_{i,t}$  è il rendimento dell' $i$ -esimo titolo in portafoglio e  $w_{i,t}$  è il peso ad esso attribuito, in relazione alla sua incidenza sul portafoglio. La normalità di  $R_p$ , data la normalità dei rendimenti dei fattori di rischio, è quindi garantita se esiste una relazione lineare tra fattori di rischio e titoli da questi dipendenti.

La varianza del rendimento di portafoglio è:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n w_i w_j \sigma_{ij} = \sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j < i} w_i w_j \sigma_{ij} \quad (2.3)$$

o, in termini matriciali:

$$\sigma_p^2 = w' \Sigma w \quad (2.4)$$

dove  $w$  è il vettore dei pesi e  $\Sigma$  è la matrice di varianza-covarianza dei rendimenti dei singoli titoli ed è costruita nel modo seguente:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

dove  $\sigma_i^2$  è la varianza dell' $i$ -esimo titolo, e  $\sigma_{ij}$  è la covarianza tra l' $i$ -esimo e il  $j$ -esimo titolo.

L'idea alla base dei metodi di stima del VaR è di stimare non la deviazione standard dei titoli in portafoglio, bensì quella dei fattori di rischio che su essi incidono (tasso di cambio, tasso d'interesse,...): il vantaggio deriva dalla considerazione che, soprattutto per portafogli molto ampi, ogni fattore di rischio inciderà verosimilmente su più di un titolo. Quindi la matrice di varianza e covarianza che è necessario stimare è quella dei fattori di rischio.

### 2.1.1 Stima della matrice di varianza e covarianza

La matrice di varianza e covarianza è alla base dei metodi analitici, ma viene normalmente utilizzata anche nel caso della simulazione Monte Carlo, che verrà trattata nel paragrafo 2.2. Più precisamente, nel metodo Monte Carlo è necessario stimare i parametri richiesti dal processo stocastico scelto: di fatto questi comprendono normalmente varianze e covarianze dei fattori di rischio considerati. Entrambi questi metodi si possono definire parametrici<sup>3</sup>, in quanto richiedono la stima di parametri, in contrapposizione alla simulazione storica, che verrà descritta nel prossimo paragrafo.

La stima di varianze e correlazioni può essere effettuata alternativamente utilizzando dati storici oppure dati derivati dal mercato.

Il secondo approccio si basa sulla capacità dei derivati, in particolare delle opzioni (si parla infatti di 'option-implied data'), di fornire informazioni sull'andamento dei prezzi di mercato: le opzioni si possono interpretare come scommesse sulla volatilità dei prezzi delle attività sottostanti, quindi i prezzi che vengono contrattati sono espressione delle aspettative dei soggetti che agiscono sul mercato. Nell'ipotesi di mercati efficienti, la stima della volatilità basata sui dati di mercato risulta migliore rispetto a quella basata sui dati storici: il problema è che spesso la gamma di opzioni presenti sul mercato non è abbastanza ampia da fornire la stima della volatilità di tutti i prezzi rilevanti.

Generalmente vengono quindi utilizzati dati storici delle variabili di interesse per ottenere le loro stime. Esistono diverse tipologie di metodi per inserire i dati storici nel calcolo della stima:

- 1) I metodi cosiddetti 'naive' sono i più semplici, in quanto utilizzano come stima del valore futuro di una variabile semplicemente il valore della variabile stessa nel periodo precedente, o al più sommano a questo una componente espressiva della variazione precedente.
- 2) I cosiddetti 'averaging methods' calcolano invece la stima come media dei valori passati della variabile che si vuole prevedere: in particolare si utilizza in questo campo la media mobile, cioè una media calcolata su un set di valori di ampiezza fissa che si sposta in modo da includere sempre i valori più recenti, scartando in ogni periodo il valore più vecchio. In formula, la stima della varianza dell' i-esimo fattore di rischio per il periodo t+1, data l'informazione disponibile nel periodo t, è:

$$\sigma_{i,t+1|t}^2 = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^M (r_{i,t-k} - \bar{r}_i)^2 \quad (2.6)$$

<sup>3</sup> Gran parte della letteratura usa l'espressione 'metodo parametrico' per riferirsi ai metodi analitici; tuttavia anche il metodo di simulazione Monte Carlo richiede la stima di parametri: esso viene infatti classificato come metodo parametrico ad esempio da Drudi, Generale, Majnoni (1997).

dove:

$M$  = ampiezza del campione ('finestra mobile');

$r_{i,t-k}$  = rendimento relativo all'i-esimo fattore di rischio realizzato in t-k (k periodi precedenti);

$\bar{r}_i$  = rendimento medio dell'i-esimo fattore di rischio.

La covarianza tra l'i-esimo e il j-esimo fattore di rischio viene stimata in modo analogo:

$$\sigma_{ij,t+1|t} = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^M [(r_{i,t-k} - \bar{r}_i)(r_{j,t-k} - \bar{r}_j)] \quad (2.7)$$

La stima della correlazione tra l'i-esimo e il j-esimo fattore di rischio si ottiene poi dalla nota formula:

$$\rho_{ij,t+1|t} = \frac{\sigma_{ij,t+1|t}}{\sigma_{i,t+1|t} \sigma_{j,t+1|t}} \quad (2.8)$$

Questo metodo ha il difetto di trattare allo stesso modo le osservazioni di diversi periodi, in quanto attribuisce ad esse pesi uguali, mentre i dati più recenti dovrebbero influire sulla stima di più di quelli più vecchi.

3) Sulla base di quest'ultima critica, i metodi più nuovi pongono un peso maggiore sulle osservazioni più recenti: questo consente alla stima di seguire meglio l'andamento reale della variabile analizzata, in quanto si ha una reazione più rapida della stima agli shock del mercato. Inoltre, nel caso di pesi diversificati, lo shock viene riassorbito lentamente, cioè, se esso ha provocato un aumento del valore della variabile considerata, la stima si riduce poi gradualmente mentre diminuisce il peso sull'osservazione 'anomala'; nel caso invece di una semplice media mobile, la riduzione della stima avviene istantaneamente, nel momento in cui l'osservazione anomala esce dal campione ('roll-off effect'), e naturalmente ciò avviene in ritardo rispetto alla diminuzione vera del valore della variabile. Queste tecniche di stima che assegnano pesi differenziati alle osservazioni a seconda della loro 'età' risolvono in qualche modo il trade-off presente nella scelta del campione per una media mobile semplice: un periodo più lungo contiene infatti maggiori informazioni, ma rende meno influenti le osservazioni più recenti, che saranno invece verosimilmente le più significative a fini previsivi. I pesi differenziati consentono invece di considerare un campione abbastanza ampio senza ridurre l'effetto delle osservazioni più recenti sulla stima.

Il più generale tra questi metodi è il GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity), che fa dipendere la stima della variabile considerata dall'osservazione più recente di questa e dalla stima precedente.

Nella versione più semplice, ovvero GARCH(1,1) si ha:

$$\sigma_{i,t+1|t}^2 = \alpha + \beta(r_{i,t} - \bar{r}_i)^2 + \delta\sigma_{i,t|t-1}^2 \quad (2.9)$$

La stima della varianza segue un processo autoregressivo, stazionario finché  $\beta + \delta < 1$ .

Analogamente la covarianza stimata è:

$$\sigma_{ij,t+1|t}^2 = \alpha + \beta[(r_{i,t} - \bar{r}_i)(r_{j,t} - \bar{r}_j)] + \delta\sigma_{ij,t|t-1}^2 \quad (2.10)$$

Un altro metodo che presenta caratteristiche analoghe, e anzi si può vedere in pratica come caso particolare del modello GARCH, è quello adottato dalla JPMorgan (che va sotto il nome RiskMetrics): esso rientra nella tipologia delle 'exponentially weighted moving average' (EWMA), e la formula con cui si ottiene la varianza stimata è la seguente:

$$\sigma_{i,t+1|t}^2 = \lambda\sigma_{i,t|t-1}^2 + (1-\lambda)(r_{i,t} - \bar{r}_i)^2 \quad (2.11)$$

dove il parametro  $\lambda$ , detto 'decay factor', fornisce una misura del tempo dopo il quale ogni osservazione perde la sua influenza sulla stima, cioè indica il 'grado di persistenza' delle osservazioni passate: più piccolo è  $\lambda$ , più veloce è la perdita di influenza delle osservazioni passate. In sostanza quindi il fattore di decadimento misura l'importanza relativa delle osservazioni passate (riassunte nella stima precedente) rispetto all'ultima osservazione. In particolare, RiskMetrics fissa il valore di  $\lambda$  a 0.94 per dati giornalieri, e a 0.97 per dati mensili.

La 2.11 esprime la stima della varianza in forma ricorsiva, e ipotizza implicitamente di disporre di un numero infinito di dati storici. La forma originale è:

$$\sigma_{i,t+1|t}^2 = (1-\lambda) \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k (r_{i,t-k} - \bar{r}_i)^2 \quad (2.12)$$

La stima della covarianza è:

$$\sigma_{ij,t+1|t}^2 = \lambda\sigma_{ij,t|t-1}^2 + (1-\lambda)(r_{i,t} - \bar{r}_i)(r_{j,t} - \bar{r}_j) \quad (2.13)$$

RiskMetrics ipotizza poi che i rendimenti abbiano media nulla, cioè  $\bar{r}_i = 0$ .

Dal punto di vista pratico, spesso questi due metodi (RiskMetrics e GARCH) danno risultati analoghi.<sup>4</sup> La principale differenza tra i due metodi consiste nella maggiore flessibilità del GARCH rispetto al RiskMetrics: nel secondo, fissando il valore di  $\lambda$  a priori, si impedisce che i pesi delle diverse componenti vengano stimati secondo procedure econometriche (come avviene invece nei GARCH). Inoltre, qualunque sia il valore di  $\lambda$ , il fattore di persistenza (che indica cioè la persistenza degli shocks) rimane sempre fissato a 1, mentre nel GARCH varia in relazione alle

<sup>4</sup> Dimostrazioni empiriche si possono trovare in Drudi, Generale, Majnoni (1997), che hanno eseguito un test sulla performance previsiva di diversi modelli: entrambi i metodi (RM e GARCH) danno un errore moderato, soprattutto se confrontati con i metodi Naive. Inoltre, sul documento tecnico di RiskMetrics (pp. 89-90) vi è un confronto dei metodi RiskMetrics e GARCH(1,1) che dimostra che le stime della varianza (riferita in questo caso al rendimento della sterlina inglese) tendono a sovrapporsi.

stime dei parametri ( $\beta + \delta$ ), determinando la stazionarietà o meno delle variabili stimate (il modello risulta non stazionario se  $\beta + \delta < 1$ ).

### 2.1.2 Il "risk-mapping"

Disponendo delle stime di varianza e covarianza per i fattori di rischio che incidono sul portafoglio, l'applicazione del metodo Delta-Normal prevede una decomposizione delle attività finanziarie presenti in portafoglio in un set di strumenti più semplici, esposti ognuno ad un solo fattore di rischio: questa procedura è detta 'risk mapping'.

Attraverso il risk mapping, il portafoglio 'vero' viene sostituito con un portafoglio artificiale, formato da esposizioni (dette posizioni standardizzate) alle diverse fonti di rischio, equivalente al primo nel senso che presenta la stessa sensibilità alle variazioni nei valori dei fattori di mercato.

Un esempio può aiutare a chiarire il concetto di risk mapping: si consideri un portafoglio costituito da un solo forward su valuta estera: esso prevede che a scadenza, tra  $t$  giorni, si riceva la quantità  $Q_e$  di valuta estera, in cambio della quantità  $Q_i$  di valuta interna. Il valore corrente del contratto è:

$$V_F = S \frac{Q_e}{(1+r_e)^t} - \frac{Q_i}{(1+r_i)^t} \quad (2.14)$$

dove:

$S$  = tasso di cambio (prezzo della valuta estera in termini di quella interna);

$r_e$  = tasso d'interesse estero;

$r_i$  = tasso d'interesse interno.

I fattori di rischio in questo caso sono il tasso di cambio e i due tassi d'interesse: usando una serie di Taylor la variazione del valore del portafoglio si può approssimare come segue:

$$\Delta V_F \approx \frac{\partial V_F}{\partial r_i} \Delta r_i + \frac{\partial V_F}{\partial r_e} \Delta r_e + \frac{\partial V_F}{\partial S} \Delta S \quad (2.15)$$

'Mappare' il portafoglio significa in questo caso definire tre posizioni standardizzate  $X_i$  (una per ogni fattore di rischio) tali da formare un portafoglio artificiale  $V$ , costituito dalla loro somma ( $V = X_1 + X_2 + X_3$ ), che risulti equivalente al portafoglio vero  $V_F$  nel senso che la variazione di  $V$  al variare dei fattori di rischio possa essere utilizzata come approssimazione della variazione di  $V_F$ .

La variazione del portafoglio artificiale viene approssimata in modo analogo a  $\Delta V_F$ :

$$\Delta V \approx \frac{\partial X_1}{\partial r_i} \Delta r_i + \frac{\partial X_2}{\partial r_e} \Delta r_e + \frac{\partial X_3}{\partial S} \Delta S \quad (2.16)$$

La 2.16 deriva dall'approssimazione sulle singole posizioni standardizzate:



$$\begin{cases} \Delta X_1 \approx \frac{\partial X_1}{\partial r_i} \Delta r_i \\ \Delta X_2 \approx \frac{\partial X_2}{\partial r_e} \Delta r_e \\ \Delta X_3 \approx \frac{\partial X_3}{\partial S} \Delta S \end{cases} \quad (2.17)$$

Le  $X_i$  vengono scelte appropriatamente imponendo la seguente condizione di equivalenza tra i portafogli:

$$\Delta V_F = \Delta V \quad (2.18)$$

cioè imponendo l'uguaglianza dei coefficienti delle approssimazioni (2.15, 2.16):

$$\frac{\partial X_1}{\partial r_i} = \frac{\partial V_F}{\partial r_i}, \quad \frac{\partial X_2}{\partial r_e} = \frac{\partial V_F}{\partial r_e}, \quad \frac{\partial X_3}{\partial S} = \frac{\partial V_F}{\partial S} \quad (2.19)$$

La 2.19 definisce l'equivalenza tra portafoglio vero e portafoglio artificiale, in quanto impone che questi abbiano la stessa sensibilità alle variazioni dei fattori di rischio.

Il contratto forward su valuta estera corrisponde alle seguenti tre posizioni standardizzate:

$$\begin{cases} X_1 = -\frac{Q_i}{(1+r_i)^t} & r_i = \text{fattore di rischio} \\ X_2 = \frac{Q_e}{(1+r_e)^t} S & r_e = \text{fattore di rischio} \\ X_3 = \frac{Q_e}{(1+r_e)^t} S & S = \text{fattore di rischio} \end{cases} \quad (2.20)$$

$X_1$  è semplicemente una posizione short in uno zero coupon bond (zcb) locale di valore nominale  $Q_i$ ;  $X_2$  è una posizione long in uno zcb di valore nominale  $Q_e$  in valuta estera;  $X_3$  è una posizione long a pronti in valuta estera: hanno la stessa espressione, ma rappresentano l'esposizione al rischio di due diversi fattori.

Una volta individuate le posizioni standardizzate, le cui grandezze descrivono il portafoglio, è necessario determinare le deviazioni standard e i coefficienti di correlazione delle variazioni dei valori di tali posizioni standardizzate: queste vengono ricavate dalla matrice di varianza e covarianza dei fattori di rischio. Le correlazioni tra le variazioni dei valori delle posizioni standardizzate sono uguali in valore assoluto a quelle tra i fattori di rischio, mentre hanno segno opposto se il valore della posizione standardizzata varia inversamente rispetto alle variazioni nel fattore di mercato associato. Con riferimento all'esempio del forward, i coefficienti di correlazione tra le posizioni standardizzate sono le seguenti:

$$\rho_{21} = \rho_{r_i} \quad \rho_{13} = -\rho_{r_e} \quad \rho_{23} = -\rho_{r_e} S$$

Le deviazioni standard, invece, sono date dal prodotto tra le deviazioni standard dei fattori di mercato e le sensibilità delle posizioni standardizzate alle variazioni dei fattori di rischio. Considerando ad esempio la prima posizione standardizzata, si può modificare la 2.17 come segue:

$$\% \Delta X_1 \approx \frac{\partial X_1}{\partial r_i} \times \frac{r_i}{X_1} \times \% \Delta r_i \quad (2.21)$$

dalla 2.21 si ricava quindi:

$$\sigma_1 \approx -\frac{\partial X_1}{\partial r_i} \times \frac{r_i}{X_1} \times \sigma_{r_i} \quad (2.22)^5$$

che esprime la deviazione standard della variazione percentuale in  $X_1$  approssimandola in funzione della deviazione standard nel tasso d'interesse interno.

Il termine di proporzionalità tra le due deviazioni standard è l'elasticità della posizione standardizzata rispetto al fattore di rischio associato: l'elasticità è unitaria se c'è linearità. In questo caso, si può avere elasticità unitaria se si considera come fattore di rischio il prezzo anziché il tasso d'interesse.

Analogamente si ottengono:

$$\sigma_2 \approx -\frac{\partial X_2}{\partial r_e} \times \frac{r_e}{X_2} \times \sigma_{r_e}$$

$$\sigma_3 \approx \frac{\partial X_3}{\partial S} \times \frac{S}{X_3} \times \sigma_S$$

Ottenute deviazioni standard e correlazioni per tutte le posizioni standardizzate, si procede a calcolare la deviazione standard dell'intero portafoglio sulla base della 2.3, utilizzando però le posizioni standardizzate al posto delle posizioni 'reali'. Con riferimento all'esempio del forward si ha:

$$\sigma_p^2 = X_1^2 \sigma_1^2 + X_2^2 \sigma_2^2 + X_3^2 \sigma_3^2 + 2X_1 X_2 \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2 + 2X_1 X_3 \rho_{13} \sigma_1 \sigma_3 + 2X_2 X_3 \rho_{23} \sigma_2 \sigma_3 \quad (2.23)$$

dove  $\rho_{ij}$  è il coefficiente di correlazione tra le posizioni standardizzate  $X_i$  e  $X_j$ , e  $\rho_{ij} \sigma_i \sigma_j$  è la covarianza tra  $X_i$  e  $X_j$ .

Il VaR si ottiene semplicemente moltiplicando  $\sigma_p^2$  per il fattore  $\alpha$  relativo al livello di confidenza scelto. E' da notare che il valore iniziale del portafoglio, rappresentato da  $W_0$  nella 2.1, è già incluso nella 2.23 in quanto le posizioni  $X_i$  sono espresse in termini assoluti, e non come pesi delle attività in portafoglio come nella 2.3 e 2.4.

Il VaR si può esprimere in forma compatta come segue:

<sup>5</sup> Il segno 'meno' serve a rendere positiva la deviazione standard, dato che la derivata è in questo caso negativa.

$$VaR = \alpha \sqrt{X' \Sigma X} \quad (2.24)$$

dove:

$\Sigma$  = matrice di varianza e covarianza;

$X$  = vettore delle posizioni standardizzate, cioè delle esposizioni ai singoli fattori di rischio.

Normalmente un portafoglio non coincide con un singolo titolo, come nell'esempio del forward, ma contiene un numero elevato di strumenti di varia natura: ogni fattore di rischio influirà però verosimilmente su diversi di questi, quindi si potranno ottenere posizioni standardizzate per l'intero portafoglio come somma di tutte le posizioni relative ad ogni fattore di rischio.

Dato un portafoglio scomposto su  $n$  fattori di rischio, il VaR per ogni singolo fattore è:

$$VaR_i = \alpha \sigma_i X_i \quad (2.25)$$

Il VaR per l'intero portafoglio, combinando la 2.23 e la 2.25, si può scrivere nel modo seguente:

$$VaR = \alpha \sqrt{\sum_{i=1}^n VaR_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j < i} VaR_i VaR_j \rho_{ij}} \quad (2.26)$$

La procedura del risk mapping si basa sull'ipotesi di linearità: la variazione del portafoglio al variare dei fattori di rischio viene infatti ipotizzata costante. Considerando il caso generico di un portafoglio rappresentato da  $n$  posizioni standardizzate  $X_i$ , relative ad altrettanti fattori di rischio, la variazione del portafoglio  $V$  al variare dei fattori  $f_i$  è approssimata dalla somma delle variazioni delle posizioni standardizzate:

$$\Delta V = \sum_{i=1}^n \Delta X_i \quad (2.27)$$

dove:

$$\Delta X_i \approx \frac{\partial X_i}{\partial f_i} \Delta f_i \quad (2.28)$$

con  $i = 1, \dots, n$ .

Nella 2.28, il coefficiente di proporzionalità tra le variazioni del fattore di rischio e della relativa posizione standardizzata è ipotizzato costante rispetto al fattore di rischio stesso, cioè si ipotizza una relazione lineare tra  $\Delta X_i$  e  $\Delta f_i$

La stessa procedura dell'esempio precedente può essere applicata ad un portafoglio costituito da uno o più coupon bond (cb). Il principio sottostante è quello di assenza di arbitraggio per cui un cb si può considerare come un portafoglio di zcb in numero pari alle cedole e di valore di rimborso pari alle medesime ad eccezione dell'ultima che include anche il principale. I valori attuali di tali zcb costituirebbero quindi le posizioni standardizzate. In questo caso i fattori di rischio sono i tassi d'interesse (o i prezzi) relativi alle diverse scadenze: sono quindi tanti quante sono le date su cui il

cb prevede versamenti. Normalmente il numero di fattori di rischio utilizzati viene limitato ai tassi (o prezzi) più comunemente impiegati (per i quali cioè sono disponibili dati storici tali da permettere la stima dei parametri quali deviazioni standard e correlazioni), quali ad esempio tassi a 1, 3, 6, 12 mesi e a 2, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 15, 20, 30 anni. Le scadenze elencate sono i cosiddetti 'vertici RiskMetrics', cioè sono le scadenze impiegate nella metodologia RiskMetrics, propria della J.P.Morgan. Questa si basa sul metodo Delta-Normal, e si caratterizza per il modo in cui stima le volatilità e le correlazioni, come visto nel paragrafo 2.1.1. Per i versamenti su scadenze diverse, si procede con un meccanismo di interpolazione volto a mantenere in qualche modo il livello di rischio. Ogni flusso fuori dai vertici viene scomposto in due flussi equivalenti sui vertici precedente e successivo, in modo che il rischio rimanga immutato. In questo caso le posizioni standardizzate sono date dal valore attuale dei nuovi flussi derivati dalla scomposizione.

In realtà la scomposizione dei flussi sui cosiddetti vertici va effettuata non solo per i titoli obbligazionari, ma ogni volta che si trattano flussi futuri la cui disponibilità non coincide con i vertici. Il problema non è banale e deve essere risolto con ricorso ad un criterio per la scomposizione dei flussi: quello proposto da Riskmetrics si basa sul principio di mantenere inalterata la deviazione standard del flusso originario (da allocare sui due vertici). Per ulteriore dettaglio su questo criterio, si veda Riskmetrics Technical Document pagg. 117-121.

La procedura di risk mapping si può applicare anche alle azioni: il VaR di un'azione è dato dal prodotto tra il suo valore corrente e la stima della volatilità del prezzo:

$$VaR = S_0 \alpha \sigma \quad (2.29)$$

dove:

$S_0$  = prezzo (cioè valore corrente) dell'azione;

$\sigma$  = deviazione standard stimata per il prezzo dell'azione.

La 2.29 è applicabile però solo se si dispone di stime di volatilità (e correlazioni) dei prezzi di tutte le azioni in portafoglio. Se si utilizza una banca dati, come ad esempio quella RiskMetrics, che fornisce stime solamente per gli indici dei mercati azionari dei diversi paesi, allora è necessario 'mappare' le azioni su tali indici, servendosi del 'beta'<sup>6</sup> delle singole azioni, che rappresenta la sensibilità del prezzo dell'azione alle variazioni delle condizioni del mercato, incorporate nel prezzo associato all'indice. La volatilità della singola azione sarà quindi data dal prodotto tra la volatilità dell'indice e il beta dell'azione stessa.

$$VaR = S_0 \alpha (\beta \sigma_{indice}) \quad (2.30)$$

<sup>6</sup>Il beta dell'azione è quello definito nel modello CAPM.

In questo modo si trascura la componente di volatilità specifica di ogni azione sulla base della ipotesi che questo possa sempre essere diversificato.

L'approssimazione lineare espressa dalla 2.28, mentre è generalmente accettabile per la maggior parte delle attività finanziarie, porta a serie distorsioni nella stima del rischio se applicata alle opzioni o ad altri strumenti simili: le opzioni, a differenza di altri derivati quali forwards, futures e swaps, sono caratterizzate da forte non-linearità rispetto al prezzo dell'underlying, che è per entrambi il fattore di rischio principale<sup>7</sup>. Ciò implica che la derivata del valore dell'opzione rispetto al prezzo del sottostante varia al variare di quest'ultimo.

Il principale fattore di rischio nei derivati in genere è il prezzo spot del bene sottostante, e l'opzione si può vedere come frazione di una posizione spot su tale bene, che viene considerata come posizione standardizzata, quantificata dal 'delta' dell'opzione (si parla infatti di 'delta-equivalent' con riferimento ad una tale posizione spot che replica l'opzione). Il problema nasce dal fatto che il metodo Delta-Normal prevede l'ipotesi che il delta sia costante sull'orizzonte temporale considerato, mentre il delta di un'opzione varia al variare del prezzo spot del bene sottostante. Quindi, in presenza di un portafoglio con una elevata componente di opzioni, il metodo Delta-Normal risulta inadeguato.

Una correzione a tale metodo è data dal metodo 'Delta-Gamma'. Esso si basa su una approssimazione del second'ordine, ovvero abbandona l'ipotesi di linearità sostituendola con quella di 'quadraticità', cioè tiene conto della convessità del valore degli strumenti rispetto ai fattori di mercato parabolico anziché lineare.

Gamma misura la variazione di secondo grado, cioè la variazione di Delta al variare del valore dei fattori di mercato:

$$\Gamma = \frac{\partial^2 X_i}{\partial f_i^2} = \frac{\partial \Delta}{\partial f_i} \quad (2.31)$$

Nella 2.28 viene aggiunto un termine che rende più precisa l'approssimazione:

$$\text{variazione } X_i = \Delta \times \text{variazione } f_i + 0.5 \times \Gamma \times (\text{variazione } f_i)^2 \quad (2.32)$$

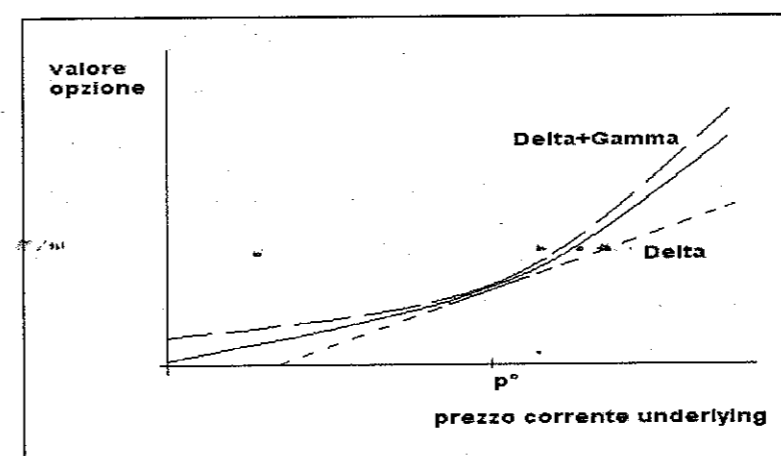
Il costo di tale miglioramento è una notevole complicazione del metodo, in termini di parametri da stimare: esso è proporzionale al numero delle fonti di rischio a cui il portafoglio è esposto, quindi il metodo è conveniente solo nel caso di portafogli contenenti una gamma ristretta di strumenti.

Il vantaggio apportato da tale correzione è molto significativo se il periodo considerato è abbastanza lungo; per periodi molto brevi, invece, il termine aggiunto diventa irrilevante, mentre è accettabile l'approssimazione del metodo originario, in quanto su un breve orizzonte temporale la variazione

dei fattori di mercato sarà verosimilmente abbastanza piccola. Infatti l'approssimazione lineare effettuata attraverso il delta produce una distorsione del valore dell'opzione tanto maggiore quanto maggiore è la variazione del prezzo spot considerata: tale errore, in relazione ad una riduzione significativa del prezzo spot, può al limite determinare un valore negativo dell'opzione, che è impossibile per la natura della stessa.

Anche il metodo 'Delta-Gamma' non fornisce comunque un'approssimazione del tutto precisa: esso tende infatti a sovrastimare il valore delle opzioni (posizione long), al contrario del metodo semplice (utilizzando solo delta) che invece lo sottostima come illustrato in Figura 2.3.

Figura 2.3 Le approssimazioni delta e delta-gamma



Per quanto riguarda le opzioni, l'approssimazione si potrebbe rendere anche più precisa (senza comunque eliminare la distorsione derivante dalla variabilità del gamma) introducendo nella scomposizione del valore dell'opzione termini relativi ad altri tipi di rischio, rappresentati dai coefficienti theta, vega e rho: con l'espressione 'the Greeks' si fa riferimento a questo tipo di approssimazione.

L'approssimazione, lineare o quadratica che sia, permette di determinare in ogni momento la variazione del valore del portafoglio come quantità proporzionale alle variazioni nei fattori di rischio, quindi richiede solamente la determinazione del valore iniziale  $W_0$  del portafoglio. E' da questa caratteristica che deriva il termine 'local valuation', in contrasto con la 'full valuation' che invece calcola le variazioni del valore del portafoglio come differenza tra i valori del portafoglio stesso relativi a livelli diversi dei fattori di mercato.

In sostanza, mentre la 'local valuation' associa ad ogni variazione nei fattori di rischio una variazione proporzionale del valore del portafoglio, la 'full valuation' prevede invece che il portafoglio venga completamente rivalutato in relazione ai nuovi valori dei fattori di rischio.

<sup>7</sup> Per le caratteristiche dei derivati, vedi Hull(1998).

## 2.2 La "Full Valuation"

In questo tipo di approccio è necessario costruire una serie di ipotetici valori futuri del rendimento di portafoglio, che, combinati con le relative frequenze, formino la distribuzione di probabilità dei futuri profitti e perdite di portafoglio: sulla distribuzione ottenuta si può poi leggere il VaR relativo al livello di confidenza scelto. Al livello di confidenza del 95%, il VaR sarà la perdita che viene uguagliata o ecceduta il 5% delle volte.

La 'full valuation' prevede che le variazioni ipotetiche del valore del portafoglio vengano ottenute, per ogni livello dei fattori di rischio, come differenza tra i valori ipotetici del portafoglio corrispondenti a diversi livelli dei fattori: mentre nella local valuation si considerano solo le variazioni dei fattori di rischio, e le variazioni del valore del portafoglio vengono definite in modo proporzionale alle prime, nella full valuation si considerano i livelli dei fattori di rischio, e il valore del portafoglio viene definito per ogni livello dei fattori. In sostanza questo significa che nella full valuation viene rilasciata l'ipotesi di linearità che caratterizza il metodo Delta-Normal.

Esistono due tipi di procedure che possono essere utilizzate per creare la distribuzione di probabilità ipotetica, l'una basata sui dati storici, l'altra che prevede una generazione casuale dei dati.

### 2.2.1. La simulazione storica

Un approccio storico più semplice, che non richiede alcuna simulazione, consiste nel raccogliere dati storici relativi al valore del portafoglio da utilizzare come valori di una distribuzione di probabilità stimata, sulla quale viene letto il VaR. Questa procedura incorpora però una distorsione di stima dovuta alla implicita ipotesi di stabilità nella composizione del portafoglio nel tempo ('ageing bias'): la simulazione storica raccoglie invece dati storici relativi ai fattori di mercato e li inserisce nel portafoglio attuale, cioè utilizzando i pesi correnti al momento della valutazione.

Il rendimento futuro di un portafoglio composto da  $n$  strumenti è:

$$R_{p,t+1} = \sum_{i=1}^n w_{i,t} R_{i,t+1} \quad (2.33)$$

dove  $w_{i,t}$  sono i pesi correnti degli strumenti in portafoglio, e  $R_{i,t+1}$  sono i rendimenti degli strumenti per il periodo successivo: sono questi che vengono ottenuti con la simulazione.

Il primo passo è quello di individuare i fattori di mercato rilevanti e di costruire, per ogni strumento in portafoglio, una formula che ne esprima il valore (cioè il prezzo) in funzione dei fattori di

mercato che su esso incidono: le formule si ricavano dai vari modelli di pricing già noti (ad esempio il modello di Black e Scholes per le opzioni).

Successivamente è necessario raccogliere i valori storici dei fattori di mercato per gli ultimi  $N$  periodi. Il numero  $N$  può essere scelto più o meno grande: il trade-off nasce dal fatto che intervalli più lunghi accrescono l'accuratezza delle stime, ma rischiano di utilizzare dati irrilevanti, smussando i cambiamenti del processo storico considerato e riducendo l'importanza dei dati più recenti.

I valori ipotetici dei fattori di mercato vengono ottenuti dai valori storici osservati, applicando le variazioni percentuali storiche da questi ricavate ai valori correnti dei fattori di mercato.

Se  $f_{i,t}$  è il valore dell' $i$ -esimo fattore di mercato al tempo  $t$ , i valori ipotetici dei fattori di mercato vengono calcolati nel modo seguente:

$$f_{i,\tau}^* = f_{i,0} + \Delta f_{i,\tau} \quad (2.34)$$

dove:

0 = momento attuale;

$\tau$  = orizzonte temporale sul quale si effettua la previsione.

La quantità che viene sommata al valore corrente dell' $i$ -esimo fattore di mercato è data dalla variazione percentuale tra due valori passati che si susseguono applicata al valore corrente dello stesso. Considerando il forward dell'esempio precedente, i fattori di mercato sono rispettivamente il tasso d'interesse interno, il tasso d'interesse estero e il tasso di cambio. A titolo esemplificativo, si consideri solo uno di tali fattori di rischio per mostrare come si forma i suoi valori ipotetici futuri. Ad esempio, dati:

$f_{i,0} = 6,063$  valore attuale (20/05/'96) del tasso

$f_{i,T} = 6,500$  valore al 28/12/'95 (T rappresenta l'età del dato considerato)

$f_{i,T+\tau} = 6,56253$  valore al 29/12/'95

la variazione giornaliera percentuale che si ottiene è 0.962%.

Quindi:

$\Delta f_{i,\tau} = 0,962\% f_{i,0} = 0,058$ , da cui:

$f_{i,\tau}^* = 6,063 + 0,058 = 6,121$  valore ipotetico del tasso per il 21/05/'96. Ciò viene ripetuto su  $N$  valori passati, in modo da ottenere  $N$  variazioni percentuali, quindi  $N$  valori ipotetici per ogni fattore di mercato.

Questi  $N$  valori ipotetici per ogni fattore di mercato vengono inseriti nelle formule di asset pricing in modo da ottenere  $N$  ipotetici valori futuri per ogni strumento in portafoglio. Tornando di nuovo all'esempio del forward, gli  $N$  valori ipotetici dei due tassi d'interesse e del tasso di cambio vengono inseriti nella 2.14: si ottengono così  $N$  valori ipotetici futuri del contratto forward.

Per ogni strumento si ricavano poi N variazioni ipotetiche, date dalla differenza tra gli N valori ipotetici e il valore corrente dello strumento: i profitti e perdite ipotetici sui singoli strumenti vengono poi sommati a formare una serie di n ipotetici valori di profitti e perdite per l'intero portafoglio. Questi vengono in seguito ordinati dalla maggiore perdita al maggior profitto, così da formare la distribuzione di probabilità su cui si calcola il VaR: se ad esempio N è uguale a 100 e il livello di confidenza scelto è del 95%, il VaR sarà il quinto valore partendo dal basso (cioè la quinta maggior perdita).

La successione in cui vengono svolte queste ultime operazioni è molto importante: sommando algebricamente profitti e perdite giornalieri per i diversi strumenti si attua un processo di compensazione che permette di tenere conto delle correlazioni tra essi, mentre ordinare profitti e perdite prima di sommarli significherebbe assumere implicitamente che tra gli strumenti in portafoglio ci sia una correlazione positiva perfetta.

### 2.2.2. La simulazione Monte Carlo

Anche in questo caso viene costruita una serie di valori ipotetici futuri per ogni fattore di mercato, che vengono utilizzati per creare una distribuzione di probabilità della variazione del valore del portafoglio sulla quale si va poi a leggere il VaR. La differenza fondamentale rispetto alla simulazione storica, sta nel modo in cui tali valori ipotetici vengono prodotti: mentre nella simulazione storica derivano dall'osservazione dei valori storici degli stessi fattori di mercato, nella simulazione di tipo stocastico (quale la Monte Carlo) essi vengono generati in modo casuale, con il vincolo di una distribuzione di probabilità che viene a priori imposta.

Il primo passo di questa procedura è, come nella simulazione storica, la individuazione dei fattori di mercato e nella definizione di formule espressive del valore dei singoli strumenti in portafoglio in funzione di tali fattori. Il secondo passo richiede invece la scelta di una distribuzione di probabilità e dei relativi parametri per i fattori di mercato; mentre nella simulazione storica veniva implicitamente assunta la distribuzione di probabilità dei valori precedenti, qui il processo stocastico diventa una libera scelta dell'analista, che comunque terrà verosimilmente conto delle osservazioni passate: si sceglierà infatti la distribuzione che si pensa approssimare meglio tali osservazioni.

In seguito si utilizza un generatore di numeri casuali per generare N ipotetici valori dei fattori di mercato, che vengono trasformati in N ipotetici valori del portafoglio. Questa volta il numero N è dell'ordine dei 10.000 e oltre; al crescere di N la stima converge al valore vero, ma la procedura si complica e richiede sempre maggiori tempi di implementazione.

La fase finale è di nuovo identica a quella della simulazione storica: dai valori ipotetici di portafoglio ottenuti si ricavano le variazioni ipotetiche del valore del portafoglio, che vengono ordinate dalla maggiore perdita al maggior guadagno, e su di essi viene letto il VaR.

Il punto cruciale della procedura di simulazione è la scelta di un particolare modello stocastico per il comportamento dei fattori di mercato: questa è di fondamentale importanza, in quanto se il processo stocastico scelto per un qualche fattore di mercato non è realistico, la misura del VaR perde di significato.

Nonostante uno degli scopi del metodo di simulazione Monte Carlo sia anche quello di considerare distribuzioni diverse da quella normale per i rendimenti dei fattori di rischio, di fatto le difficoltà legate alla scelta e alla generazione di tali distribuzioni ne hanno finora scoraggiato un utilizzo operativo. Ipotesi classica sottostante al metodo MC è ancora la normalità dei fattori di rischio: è da notare che la differenza fondamentale rispetto ai metodi analitici è che non viene fatta alcuna ipotesi sulla relazione tra fattori di rischio e valore del portafoglio, quindi implicitamente sulla distribuzione di quest'ultimo.

Un modello comunemente usato per modellare l'andamento dei fattori di rischio è il 'geometric Brownian motion' (GBM): esso si basa sull'assunzione di un certo comportamento delle variazioni infinitesime dei fattori di mercato che risulta particolarmente adatto alla stima dei prezzi S ad esempio delle azioni; le variazioni di prezzo possono essere descritte nel seguente modo:

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma_t S_t dz \quad (2.35)$$

dove  $\mu_t$  e  $\sigma_t$  rappresentano rispettivamente media e volatilità istantanee del rendimento al tempo t, mentre z è un processo di Wiener.<sup>8</sup>

Considerando ora intervalli di tempo discreti, e sostituendo la variabile  $dz \sim N(0, dt)$  con il prodotto  $\varepsilon \sqrt{\Delta t}$  con  $\varepsilon \sim N(0, 1)$ , si ha:

$$\Delta S_t = S_{t-1} (\mu \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t}) \quad (2.36)$$

Il prezzo ipotetico per il periodo t risulta quindi:

$$S_t = S_{t-1} + S_{t-1} (\mu \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t}) \quad (2.37)$$

La 2.37 si può anche scrivere esplicitando il rendimento percentuale relativo al prezzo iniziale dell'azione.

$$\frac{\Delta S_t}{S_{t-1}} = \mu \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t} \quad (2.38)$$

La 2.38 è la forma più usata per descrivere il comportamento del prezzo di un'azione. Si assume così che il rendimento percentuale abbia una distribuzione normale  $N(\mu\Delta t, \sigma^2\Delta t)$ , non si sta invece facendo alcuna ipotesi sul rendimento del portafoglio o del titolo considerato. Ad esempio, la distribuzione dei profitti e perdite associati ad un'opzione su azione avrà una distribuzione diversa dalla normale, data la non-linearità di tale strumento.

Nella 2.36 (e 2.37) si è implicitamente ipotizzato che  $\mu$  e  $\sigma$  siano costanti nel tempo: in realtà possono essere stimati per ogni periodo  $t$  sulla base delle informazioni disponibili in  $t-1$ .

La generazione della variabile casuale viene ripetuta un numero molto elevato di volte (ad esempio almeno 10.000) per creare la distribuzione di probabilità del prezzo  $S_t$ .

Questo processo stocastico non è però efficace nel caso di titoli a reddito fisso privi del rischio di fallimento, per i quali i tassi d'interesse hanno la tendenza a tornare alla media ("mean reversion"): in questi casi è più adatto un altro processo, usato da Cox, Ingersoll e Ross nel loro famoso modello (1985) per la struttura dei tassi:

$$dr_t = k(\theta - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dz \quad (2.39)$$

dove:

$\theta$  = valore di lungo periodo del tasso d'interesse;

$k$  = velocità di mean-reversion, si ipotizza  $k < 1$ ;

$dz$  è come prima la variabile  $N(0, dt)$  i cui valori vengono generati in modo casuale.

Quando il tasso d'interesse rimane vicino al suo valore di lungo periodo, la variazione che viene generata tende ad avere media zero; quando il tasso si discosta significativamente, viene invece generata una variazione di segno opposto tale da riportarne il valore alla media.

Nella realtà il problema di generazione dei valori ipotetici per i fattori di mercato è più complesso, in quanto un portafoglio è normalmente influenzato da diversi di tali fattori, peraltro correlati tra loro, quindi non è accettabile l'utilizzazione di processi stocastici distinti e indipendenti. Per completezza si accenna di seguito alla procedura da seguire per tenere conto dell'effetto di diversificazione.

La soluzione consiste nell'introdurre i coefficienti di correlazione  $\rho$  tra i fattori di rischio rilevanti nella generazione dei numeri  $\varepsilon$ . Se vengono individuati  $m$  fattori di rischio, per ottenerne i valori ipotetici attraverso la generazione casuale sono necessarie  $m$  variabili: queste vengono costruite come trasformazioni di un altro set di variabili  $\eta$ , indipendenti e distribuite come normali standard  $N(0,1)$ . Se

$$\varepsilon = T\eta \quad (2.40)$$

<sup>8</sup> La variabile  $z$  segue quindi un processo di Wiener se  $dz = \varepsilon\sqrt{dt}$  è distribuito normalmente con media 0 e varianza  $dt$  e i

la trasformazione  $T$  deve essere tale che, per ogni  $i$  e  $j$ :

$$\begin{cases} E(\varepsilon_i) = 0 \\ V(\varepsilon_i) = 1 \\ Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \rho_{ij} \end{cases} \quad (2.40),$$

dove  $i$  e  $j$  fanno riferimento all' $i$ -esimo e al  $j$ -esimo fattore di rischio, e  $\rho_{ij}$  è la correlazione stimata tra essi.

Per determinare la trasformazione  $T$  si può utilizzare la tecnica di 'fattorizzazione di Cholesky', qui illustrata per il caso più semplice di due fattori. Dato  $\varepsilon = [\varepsilon_1 \ \varepsilon_2]'$ , imponendo le condizioni della 2.41 si ha che

$$V(\varepsilon) = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} \\ \rho_{12} & 1 \end{bmatrix}$$

Avendo ipotizzato che  $\eta_i$  siano normali  $N(0,1)$ , la varianza del vettore  $\eta = [\eta_1 \ \eta_2]'$  è una matrice identità  $I$  di ordine 2. Dalla 2.40 si ricava che  $V(\varepsilon) = TT'$ ; scrivendo  $T$  come matrice generica, i suoi elementi  $a_{ij}$  si possono determinare come segue:

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} \\ \rho_{12} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^2 & a_{11}a_{21} \\ a_{11}a_{21} & a_{21}^2 + a_{22}^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_{11} = 1 \\ a_{21} = \rho_{12} \\ a_{22} = \sqrt{1 - \rho_{12}^2} \end{cases}$$

Quindi  $\varepsilon$  si ricava applicando la 2.40:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \rho_{12} & \sqrt{1 - \rho_{12}^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_1 = \eta_1 \\ \varepsilon_2 = \rho_{12}\eta_1 + \sqrt{1 - \rho_{12}^2}\eta_2 \end{cases}$$

Per  $m$  fattori di rischio si segue la stessa procedura.

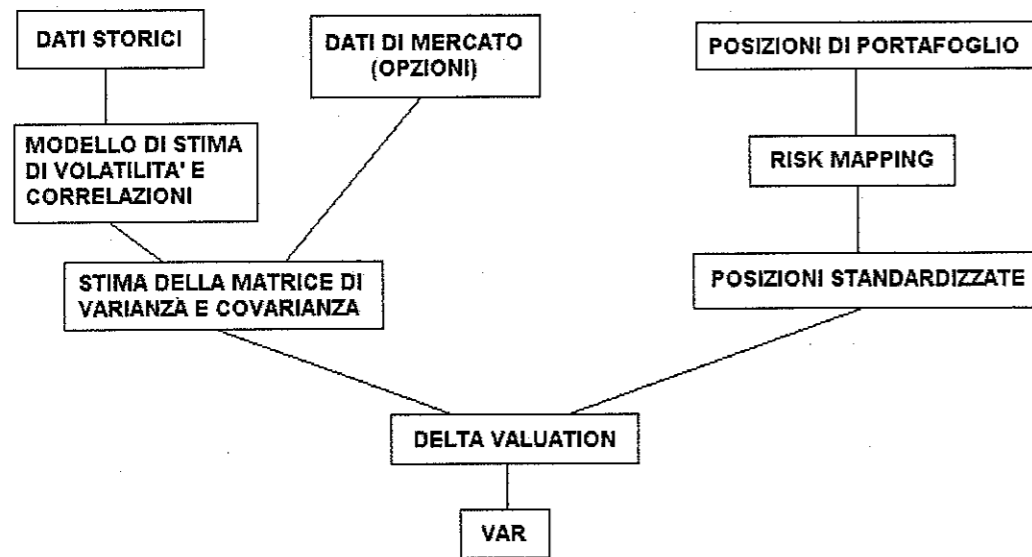
### 2.3 Uno schema riassuntivo

A conclusione della sezione 2 sui metodi di stima del VaR, si presenta uno schema riassuntivo delle fasi principali che caratterizzano i metodi descritti. Si noti che, i due metodi di simulazione, dato che prevedono praticamente le stesse fasi, vengono illustrati nello stesso schema, in cui però vengono messe in evidenza le differenze.

valori di  $dz$  su diversi intervalli di tempo sono indipendenti.

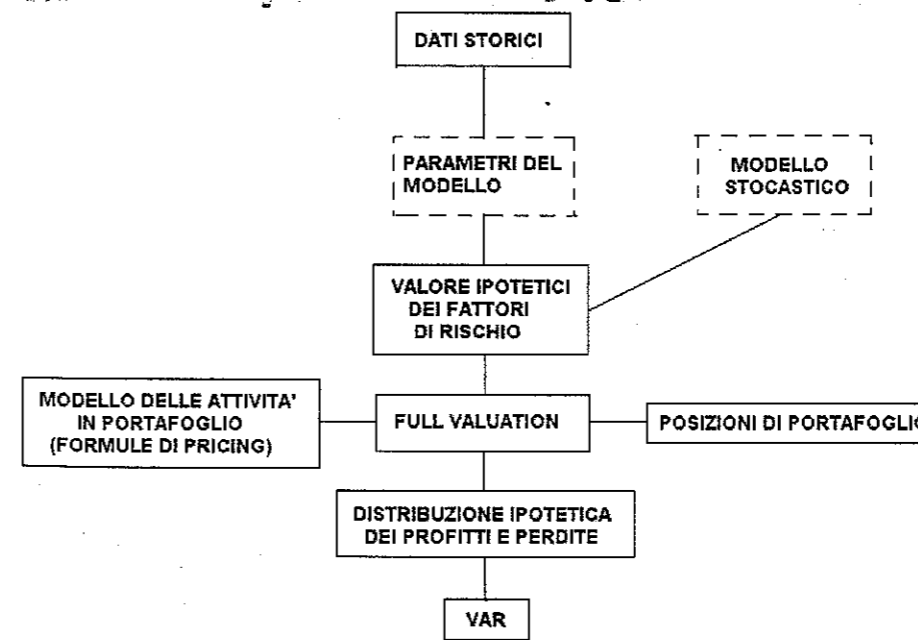
**LOCAL VALUATION (metodo Delta-Normal):**

- 1) individuazione dei fattori di rischio rilevanti;
- 2) mapping: definizione delle posizioni standardizzate relative ai singoli fattori di rischio;
- 3) stima di volatilità e correlazioni dei fattori di rischio, quindi delle posizioni standardizzate sulla base dell'ipotesi di linearità;
- 4) combinazione di varianze e correlazioni da un lato e posizioni standardizzate dall'altro per il calcolo del VaR secondo la 2.24.



**FULL VALUATION (metodi di simulazione):**

- 1) individuazione dei fattori di rischio rilevanti;
- 2) simulazione sui fattori di rischio per ottenere i valori ipotetici: essi vengono generati nella simulazione storica applicando le variazioni percentuali passate al valore corrente dei fattori di rischio, mentre nella simulazione Monte Carlo basandosi sui parametri e sul processo stocastico scelto;
- 3) determinazione delle formule di asset pricing in cui inserire i valori ipotetici dei fattori di rischio ottenuti al punto 2;
- 4) dai punti 2 e 3 si ottengono i valori ipotetici del portafoglio, da cui si ricava la distribuzione
- 5) lettura del VaR sulla distribuzione ipotetica di profitti e perdite, in base al livello di confidenza scelto ipotetica della variazione del valore del portafoglio (cioè di profitti e perdite);



— elementi comuni a entrambi i metodi  
 - - - elementi propri del metodo di simulazione Monte Carlo

### 3. Un confronto tra i metodi di calcolo del VaR: i più recenti sviluppi

Tutti i metodi fin qui esaminati contengono trade-off e semplificazioni; nessuno di essi può essere in assoluto considerato migliore degli altri: la scelta su quale metodo adottare sarà quindi strettamente legata alle esigenze specifiche di ogni caso.

I metodi di simulazione (storica e stocastica) condividono un importante vantaggio rispetto al metodo analitico nel caso di un portafoglio che contenga molte opzioni: come illustrato sopra, metodi di valutazione locale basati su un'ipotesi di linearità (quale è il Delta-Normal) non sono in grado di stimare correttamente il valore delle opzioni, quindi producono una stima del VaR tanto più distorta quanto più forte è la componente di 'opzionalità' nel portafoglio. I metodi di full valuation, invece, permettono di catturare senza distorsione il valore delle opzioni in relazione ad ogni livello del prezzo sottostante. Tra l'altro il prezzo delle opzioni viene influenzato anche direttamente dalle variazioni nella volatilità (vega risk) di cui si può tenere conto nei metodi di simulazione inserendo la volatilità delle opzioni come fattore di rischio.

L'efficacia del metodo Delta-Normal è fortemente limitata anche dall'altra ipotesi sottostante, quella della normalità dei rendimenti degli strumenti in portafoglio: nel caso teorico in cui la distribuzione empirica fosse esattamente una normale, e valesse l'ipotesi di linearità, il metodo Delta-Normal darebbe esattamente lo stesso risultato della simulazione Monte Carlo (se non si considera la distorsione derivante dalla limitatezza del numero di scenari utilizzati, e naturalmente se in questa si è scelta una distribuzione normale per la generazione dei dati). In realtà, spesso accade che la distribuzione empirica presenti irregolarità rispetto alla normale; ad esempio nelle variabili finanziarie è tipico trovare distribuzioni con osservazioni in eccesso nelle code (fat tails) e al centro e in difetto nelle zone intermedie ('leptokurtic distributions'): anche in questi casi il metodo Delta-Normal produce stime distorte.

Il metodo di simulazione Monte Carlo può aiutare a ridurre tale distorsione grazie alla sua flessibilità: è infatti l'analista che sceglie una distribuzione che approssimi nel miglior modo possibile quella reale; comunque, il fatto stesso di definire a priori e in via teorica una distribuzione standard per i rendimenti dei fattori di mercato può essere fonte di errori. Questo difetto, legato alla parametricità dei due metodi, è invece assente nel metodo della simulazione storica, che è appunto non-parametrico: qui non si impone alcuna ipotesi, ma si lascia che siano i dati storici stessi a definire precisamente la forma della distribuzione di probabilità. Questo è senz'altro un vantaggio della HS (historical simulation) rispetto alla MCS (Monte Carlo simulation), anche se una distorsione nasce dal fatto che i dati vengono trattati come derivanti da una distribuzione di probabilità fissa invece che da una che può variare nel tempo. Più in generale, comunque, la HS,

ricavando gli scenari (serie di valori ipotetici) che utilizza direttamente dal mercato, ha una maggiore capacità di cogliere i movimenti particolari del mercato, che devono invece essere inquadrati in processi predefiniti nella MCS. Inoltre la stima dei parametri coinvolti nella distribuzione scelta può essere fonte di errori legati alla metodologia di stima e alla dimensione del campione utilizzato.

Un altro problema è quello legato all'uso di dati storici, che viene condiviso, per lo meno in parte, da tutti i metodi fin qui illustrati: i dati storici vengono utilizzati nella HS direttamente per la costruzione degli scenari, mentre nella MCS e nel Delta-Normal per la stima dei parametri rilevanti (a meno che non si utilizzino informazioni ricavate direttamente dal mercato, caso che come detto sopra è abbastanza raro). Tale problema consiste nel trade-off relativo alla lunghezza del campione utilizzato: da un lato un periodo corto ha scarsa capacità di descrivere le caratteristiche dell'andamento delle variabili, in quanto contiene poche informazioni (la distorsione che nasce è il cosiddetto 'sampling error'); dall'altro lato un periodo lungo non coglie la variabilità delle condizioni del mercato e la direzione attuale del mercato, in quanto riduce l'importanza relativa delle informazioni più recenti, ed ha quindi scarsa capacità previsiva.

Nel caso della MCS e del Delta-Normal, questo problema può essere affrontato utilizzando metodi di stima dei parametri che impongano pesi decrescenti sulle osservazioni passate (GARCH o EWNA), in modo da includere comunque nel campione un numero elevato di osservazioni, conferendo però maggiore importanza a quelle più recenti. La HS soffre invece molto di questo problema di stazionarietà.

A questo proposito, recentemente è stato proposto un nuovo metodo, conosciuto come 'the hybrid approach' (Boudoukh, Richardson, Whitelaw, 1997), che è appunto il risultato della mescolanza di due metodi già esistenti: la simulazione storica e il metodo utilizzato dalla JPMorgan, RiskMetrics, che è in sostanza una versione del metodo Delta-Normal che utilizza stime della matrice di covarianza calcolate con l'omonimo metodo.

Il metodo è volto a catturare i pregi di entrambi i metodi e ad eliminarne i difetti: da un lato esso utilizza lo stesso criterio di RiskMetrics per pesare le informazioni relative ai valori passati delle variabili di interesse, attribuisce cioè un peso maggiore alle informazioni più recenti, risolvendo così uno dei maggiori problemi insiti nella simulazione storica. Dall'altro elimina le ipotesi che sono invece alla base di RiskMetrics, cioè normalità e linearità dei rendimenti, che possono essere incompatibili con la realtà e portare a distorsioni nelle stime del VaR.

In pratica il metodo ibrido è una simulazione storica che però impone pesi decrescenti sui dati passati; come nella simulazione storica vengono osservati i rendimenti dei fattori di mercato



realizzatisi per un certo periodo di lunghezza N, ma ad essi vengono attribuiti pesi diversi nel modo seguente: dati i rendimenti  $R(t), R(t-1), \dots, R(t-N+1)$ , i pesi sono rispettivamente:

$$\left[ \frac{(1-\lambda)}{(1-\lambda^N)} \right], \left[ \frac{(1-\lambda)}{(1-\lambda^N)} \right] \lambda, \dots, \left[ \frac{(1-\lambda)}{(1-\lambda^N)} \right] \lambda^{N-1}$$

Il fattore  $\lambda$  è il 'decay factor' di cui si è parlato nel paragrafo precedente: quanto minore è  $\lambda$ , tanto maggiore è il peso sulle osservazioni più recenti rispetto al peso su quelle più vecchie. (La costante  $(1-\lambda)/(1-\lambda^N)$  semplicemente assicura che la somma dei pesi sia 1). Una serie di valori ipotetici del portafoglio viene ottenuta, come nella simulazione storica, sottoponendo il portafoglio attuale ai rendimenti ipotetici dei fattori di mercato; il peso sulle osservazioni determina la probabilità associata ad esse nella definizione della distribuzione dei rendimenti: i valori derivati dalle osservazioni più recenti avranno quindi una probabilità maggiore di quelli derivati da osservazioni più vecchie. Dopo aver ordinato gli ipotetici valori di portafoglio in ordine di grandezza, il VaR viene determinato dalla perdita che viene uguagliata o ecceduta il 5% delle volte (se l'intervallo di confidenza scelto è del 95%). La differenza rispetto alla simulazione storica, in quest'ultima fase, sta nel fatto che, mentre in questa il VaR si trova semplicemente contando dal valore inferiore il numero di valori che è uguale al 5% del numero N dei valori disponibili, nel metodo ibrido è necessario arrivare al 5% sommando i pesi (cioè le probabilità) dei singoli valori. In pratica, se N è uguale a 100, nella HS il VaR coincide con il quinto valore dal basso, dato che a tutte le 100 osservazioni viene attribuita uguale probabilità dell'1%; nel metodo ibrido, invece, dato che le osservazioni hanno probabilità diversa a seconda della loro 'età', è necessario conoscere i pesi per determinare il valore corrispondente alla probabilità cumulata del 5%.

Le prove empiriche effettuate da Boudouk, Richardson e Whitelaw (1997), sembrano confermare la superiorità di questo metodo rispetto ai due dai quali deriva (RiskMetrics e HS), soprattutto per variabili la cui distribuzione sia fortemente caratterizzata da 'code grasse' (fat-tailed).

Un problema che comunque rimane in relazione alla simulazione storica è quello della mancanza di dati: può infatti succedere che certi strumenti, in particolare quelli nuovi per il mercato considerato, siano collegati a fattori di rischio per i quali non sono disponibili dati storici (o non ce ne sono a sufficienza). Mentre esistono vie alternative per assegnare valori a volatilità e correlazioni, quindi gli altri metodi si possono comunque applicare, la simulazione storica in questi casi non è realizzabile.

Oltre a tutte le possibili distorsioni viste sopra che riguardano il modo in cui gli scenari vengono simulati, in entrambi i metodi di simulazione un errore può sorgere dal numero degli scenari utilizzati (cioè dal numero di valori ipotetici di portafoglio prodotti): questi devono infatti essere sufficienti a riflettere adeguatamente la distribuzione di probabilità. Questo tipo di errore, noto

come 'convergence error', coincide nel caso della HS con il 'sampling error', dato che questa usa i dati storici come scenari. Esso viene ridotto semplicemente incrementando il numero degli scenari: mentre nella MCS è possibile ottenere una precisione notevole effettuando un numero molto elevato di simulazioni, nella HS il grado di convergenza raggiungibile è molto più basso perchè i dati storici disponibili hanno un numero limitato, in particolare nei mercati emergenti, e comunque perchè dati molto vecchi hanno scarso significato se, come è verosimile, nel lungo periodo si verificano cambiamenti strutturali; la simulazione stocastica invece può essere teoricamente ripetuta quante volte si desidera.

A fronte della maggiore precisione offerta, la MCS presenta un grado di difficoltà molto maggiore rispetto alla HS nella fase della costruzione degli scenari: la sua implementazione richiede infatti appositi software molto complessi. Inoltre la ripetizione delle simulazioni è un procedimento lento, è quindi necessario valutare anche il costo in termini di tempo impiegato. La HS, oltre alla facilità di implementazione, presenta anche il vantaggio di essere estremamente semplice da spiegare e da capire, anche rispetto al Delta-Normal, in quanto non presuppone alcuna particolare ipotesi e non si basa su tecniche statistiche particolari.

Oltre all' 'approccio ibrido' sopra descritto, sono state recentemente fatte anche alcune proposte di innovazione al metodo della simulazione storica, volte a modificare gli scenari considerati in modo da tenere conto delle attuali condizioni del mercato.

Tra queste, una è quella di costruire 'scenari specchio' (mirror scenarios) moltiplicando la variazione dei rendimenti dei fattori di rischio di ogni scenario storico per -1: in pratica si raddoppia il numero degli scenari, riducendo quindi l'errore di convergenza senza incrementare l'errore dovuto alla variazione delle condizioni di mercato (dato che il numero dei ritardi utilizzati rimane lo stesso).

Un'altra proposta è quella di utilizzare scenari ottenuti come trasformazione degli scenari storici originari, che tengano conto delle attuali condizioni di mercato; i nuovi scenari sono:

$$\bar{V}_k = \bar{C}^{1/2} \times C^{-1/2} \times V_k \quad \text{per } k = 1, \dots, m \quad (3.1)$$

dove:

$m$  = numero di scenari;

$C$  = matrice di covarianza che riflette i dati storici;

$\bar{C}$  = matrice di covarianza che riflette le attuali condizioni del mercato;

$V_k$  = k-esimo scenario storico originario.

Una terza proposta, applicabile anche alla simulazione Monte Carlo per avere una maggiore aderenza degli scenari alle condizioni di mercato, è quella di pesare tali scenari secondo le esigenze.

Il primo passo consiste nella creazione (casuale o storica) di un numero abbastanza elevato di

scenari; in secondo luogo si definisce un insieme di statistiche (modelled statistics: generalmente media, volatilità, indice di asimmetria, kurtosis, correlazioni) che dovrebbero rappresentare le condizioni attuali di mercato. I pesi, da applicare poi agli scenari per il calcolo del VaR, vengono ricavati dalla soluzione di n sistemi (uno per ogni fattore di rischio) di equazioni che impongono appunto agli scenari pesati di rappresentare le statistiche modellate: i pesi sono le incognite del sistema.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mu_i = \sum_{k=1}^m w_k \hat{V}_{i,k} & \text{media} \\ \sigma_i^2 = \sum_{k=1}^m w_k (\hat{V}_{i,k} - \mu_i)^2 & \text{varianza} \\ \gamma_i = \sum_{k=1}^m w_k [(\hat{V}_{i,k} - \mu_i) / \sigma_i]^3 & \text{skewness} \\ \eta_i = \sum_{k=1}^m w_k [(\hat{V}_{i,k} - \mu_i) / \sigma_i]^4 & \text{kurtosis} \\ \rho_{ij} = \frac{1}{\sigma_i \sigma_j} \sum_{k=1}^m w_k (\hat{V}_{i,k} - \mu_i)(\hat{V}_{j,k} - \mu_j) & \text{correlazione} \end{array} \right. \quad \text{per } i = 1, \dots, n \quad (3.2)$$

dove:

$\hat{V}$  è il k-esimo scenario (valore ipotetico) per l'i-esimo fattore di rischio;  
 $w_k$  è il peso del k-esimo scenario.

Il problema pratico maggiore è quello della risoluzione del sistema, che non è sempre possibile.

Infine, una proposta molto recente per il calcolo del VaR è quella di El Jahl, Perraudin e Sellin (1999), che pone l'attenzione sul problema degli strumenti finanziari non lineari quali le opzioni: questi propongono un metodo alternativo al metodo MCS, che prevede la determinazione di una distribuzione del rendimento del portafoglio sulla base delle distribuzioni dei fattori di rischio, evitando la più semplice ipotesi di linearità. Sinteticamente, il metodo prevede le seguenti fasi:

1. specificazione del processo stocastico che guida i rendimenti dei fattori di rischio;
2. calcolo dei momenti (almeno i primi quattro) dei rendimenti al punto 1;
3. aggregazione dei momenti al punto 2 per ottenere i momenti del rendimento del portafoglio;
4. determinazione di una distribuzione del rendimento di portafoglio dai suoi momenti (punto 3);
5. lettura del VaR sulla distribuzione al punto 5.

Nonostante queste recenti proposte di innovazione e correzione dei tre metodi fondamentali, questi ultimi rimangono il punto di riferimento per la stima del VaR.

Un 'difetto' comune a tutti i metodi di stima del VaR che utilizzano dati storici, compresi quelli corretti per dare maggiore importanza alle informazioni più recenti, è quello di ipotizzare che il passato (anche se il più recente) sia una buona previsione del futuro: in sostanza si fa

implicitamente una ipotesi di stazionarietà, escludendo la possibilità di cambiamenti improvvisi e drastici delle condizioni del mercato che non siano in qualche modo preannunciati dai dati storici.

Quello di cui i metodi illustrati non tengono conto è il cosiddetto 'event risk', cioè il rischio di eventi improvvisi che modifichino in modo significativo l'ambiente di mercato, tanto da invalidare le stime prodotte.

Per questi casi, un metodo che risulta adeguato è lo 'stress testing': esso segue la stessa procedura della simulazione, nel senso che sottopone il portafoglio attuale a diverse serie di rendimenti ipotetici dei fattori di mercato, in modo da ottenere una distribuzione di probabilità per il portafoglio stesso, sulla quale viene poi letto il VaR.

La differenza sostanziale rispetto ai metodi di simulazione riguarda il modo in cui vengono definiti gli scenari ipotetici, sui quali cioè i valori ipotetici di portafoglio vengono calcolati: nello stress testing essi vengono creati in modo arbitrario dall'analista, in modo da prevedere anche i casi più estremi e improbabili. Gli scenari ipotetici contengono quindi una forte componente di soggettività, cioè rispecchiano le opinioni e le aspettative di chi svolge il calcolo: ciò può naturalmente essere fonte di notevoli errori di stima. Lo stress testing va in realtà considerato non tanto come metodo alternativo agli altri metodi di calcolo del VaR visti in precedenza, quanto come complementare ad essi: una volta ottenuta una stima del VaR, lo stress testing può essere utile per quantificare l'entità della perdita nel caso che il VaR venga ecceduto, cioè in casi di condizioni di mercato eccezionalmente sfavorevoli, tanto da rientrare nella percentuale esclusa dall'intervallo di confidenza (1-c, con riferimento alle definizioni date nel primo capitolo).

Di fatto, la procedura è quindi quella di sottoporre il portafoglio ai peggiori valori per i fattori di mercato, che peraltro non sempre coincidono con i valori estremi; si pensi al caso di una combinazione di posizioni long su opzioni relative ad attività correlate negativamente (cioè i cui prezzi variano in modo inverso): in un caso del genere il valore complessivo più basso si ha quando i prezzi di tali attività rimangono immutati. E' da notare che il metodo dello stress testing trascura completamente le correlazioni esistenti tra i diversi strumenti in portafoglio: ciò è coerente con la constatazione che, in condizioni di mercato particolarmente sfavorevoli, le correlazioni tendono a crescere in modo significativo.

Il metodo MCS può essere utilizzato per analizzare casi di eccezionali cambiamenti delle condizioni di mercato: gli scenari vengono in questo caso simulati sulla base di una deviazione standard molto elevata, oppure di correlazioni che tendono a 1. Naturalmente, anche nel metodo MCS, quando utilizzato a questo scopo particolare, viene introdotta una componente di soggettività, che si esprime nella scelta dei valori da attribuire ai parametri (deviazione standard e coefficienti di correlazione).

Dopo questa trattazione si può concludere che, in linea teorica, la soluzione migliore sarebbe quella di calcolare il VaR con metodi diversi e analizzare le fonti dei diversi risultati. Dovendo scegliere un metodo di calcolo, si dovrà guardare alle caratteristiche del caso specifico, cioè al tipo di mercato in cui si opera, ai mezzi di cui si dispone, e agli scopi per i quali si effettua il calcolo del VaR. Di fatto, il metodo più diffuso al momento attuale è il Delta-Normal, in particolare nella forma di RiskMetrics: molte istituzioni finanziarie utilizzano infatti per il calcolo del VaR i dati relativi a deviazioni standard e correlazioni dei fattori di rischio forniti dalla J.P.Morgan.

La tabella che segue sintetizza il confronto tra i tre principali metodi per il calcolo del VaR.

Metodi →	DELTA-NORMAL	SIMULAZIONE STORICA	SIMULAZIONE MONTE CARLO
Caratteristiche ↓			
1) ipotesi di linearità del valore del portafoglio rispetto ai fattori di rischio	Si	No	No
2) capacità di catturare il rischio delle opzioni (in relazione all'ipotesi di linearità)	No (il metodo è accettabile solo per un portafoglio con bassa 'opzionalità' limitato e un breve orizzonte temporale)	Si	Si
3) necessità di ipotizzare una specifica distribuzione dei rendimenti	Si è necessario ipotizzare una distribuzione normale sia per i rendimenti dei singoli fattori di rischio sia per il rendimento dell'intero portafoglio (come conseguenza dell'ipotesi di linearità)	No la distribuzione dei rendimenti è quella empirica, derivata cioè dai valori storici dei fattori di rischio	Si è necessario ipotizzare una distribuzione di probabilità (normale o altra) per i rendimenti dei fattori di rischio, quella del portafoglio viene determinata dalle formule di pricing

4) necessità di stimare dei <u>parametri</u>	Si sono necessarie le stime di volatilità e correlazioni dei fattori di rischio	No	Si sono necessarie le stime dei parametri richiesti dal modello adottato (ad esempio volatilità e correlazioni dei fattori di rischio)
5) dipendenza da <u>dati storici</u>	Si Se le stime della volatilità e le correlazioni sono basate su dati storici	Si I valori ipotetici dei rendimenti dei fattori di rischio non sono altro che i loro valori passati	Si se le stime dei parametri sono basate su dati storici
6) necessità di <u>modelli di pricing</u>	No	Si	Si
7) necessità di <u>risk-mapping</u>	Si	No	No
8) difficoltà di <u>implementazione</u>	Medio	Facile (disponendo di dati storici)	Difficile
9) difficoltà di <u>comprensione</u> per l'utente	Difficile	Facile	Difficile
10) possibilità di <u>"sensitivity analysis"</u>	Si È possibile esaminare ipotesi diverse sulle stime di volatilità e correlazioni, ma rimane fissa l'ipotesi di normalità sulla distribuzione dei rendimenti	No	Si È possibile esaminare ipotesi diverse sia sulle stime dei parametri sia sulla distribuzione dei rendimenti

## Appendice

Dimostrazione della 2.1:

Data la variabile  $\varepsilon$  distribuita come una  $N(0,1)$ , con funzione di probabilità  $\Phi(\varepsilon)$ , si può dire che:

$$1-c = \int_{-\infty}^{\alpha} \Phi(\varepsilon) d\varepsilon \quad (1a)$$

Allo stesso modo, relativamente al rendimento del portafoglio R:

$$1-c = \int_{-\infty}^{\alpha} f(R) dR \quad (2a)$$

Se R ha una distribuzione  $N(\mu_p, \sigma_p^2)$ , allora la relazione tra R e  $\varepsilon$  si può scrivere come segue:

$$R = \mu_p + \sigma_p \varepsilon \quad (3a)$$

Di conseguenza, combinando le 3a, 2a, 1a, si ottiene che:

$$R^* = \mu_p - \alpha \sigma_p \quad (4a)$$

quindi, sostituendo la 4a nelle espressioni 1.6 e 1.7, il VaR si può esprimere come segue:

$$\text{VaR relativo} = W_0 [E(R) - R^*] = W_0 [\mu_p - (\mu_p - \alpha \sigma_p)] = \alpha \sigma_p W_0 \quad (5a),$$

$$\text{VaR assoluto} = -R^* W_0 = (-\mu_p + \alpha \sigma_p) W_0 = \alpha \sigma_p W_0 - \mu_p W_0 \quad (6a).$$

Si può vedere che, sotto l'ipotesi che il rendimento di portafoglio abbia media nulla ( $\mu_p = 0$ ), si ha coincidenza tra la 5a e la 6a.

## BIBLIOGRAFIA<sup>9</sup>

- Alexander, C., O., 1997. "On the Covariance Matrices Used in Value at Risk Models", *The Journal of Derivatives*, Spring, pp. 50-62.
- Beder, T., S., 1995. "VaR: Seductive but Dangerous", *Financial Analysts Journal*, Vol. 51, No. 5, pp. 12-24.
- Boudoukh, J., Richardson, M., Whitelaw, R., 1998. "The Best of Both Worlds", *Risk*, maggio '98.
- Boudoukh, J., Richardson, M., Whitelaw, R., 1997. "The Best of Both Worlds: A Hybrid Approach to Calculating Value at Risk", Working Paper, S-97-31.
- Choudhury, P., 1996. "Optional Extras", *Risk*, Vol. 9(1), supplemento speciale.
- Christiansen, C., 1998. "Value at Risk Using the Factor-ARCH Model".\*
- Crnkovic, C., e Drachman, J., 1996. "Quality Control", *Risk*, Vol. 9(2), No. 9, pp. 138-143.
- Drudi, F., Generale, A., Majnoni, G., 1997. "Sensitivity of VaR Measures to Different Risk Models", Banca d'Italia, Temi di Discussione, No. 317.
- Duffie, D., e Pan J., 1997. "An Overview of Value at Risk", *The Journal of Derivatives*, Spring, pp. 7-49.
- Elderfield, M., 1995. "Capital Countdown", *Risk*, Vol.8(1), No. 2.
- El Jahel, L., Perraudin, W., Sellin, P., 1999, "Value at Risk for Derivatives", *Journal of Derivatives*, pp. 7-27.
- Finger, C., C., 1996. "Accounting for 'pull to par' and 'roll down' for RiskMetrics cashflows", terzo trimestre, pp. 4-11.\*\*
- Gumerlock, R., 1996. "Lacking Commitment", *Risk*, Vol. 9(1), No. 6.
- Hendricks, D., 1996. "Evaluation of Value-at-Risk Models Using Historical Data", *Federal Reserve Bank of New York Economic Policy Review*, Vol. 2, pp. 39-69.
- Holton, G., 1998. "Simulating Value-at-Risk", *Risk*, maggio '98.
- Hull J.C., 1998, *Opzioni, Futures e altri Derivati*, Il Sole 24 Ore Libri, Milano.
- Jackson, P., Maude, D.J., Perraudin, W., 1998. "Bank Capital and Value at Risk", Bank of England.
- Jorion, P., 1996. "Risk2: Measuring the Risk in Value at Risk", *Financial Analysts Journal*, Vol. 52, pp. 47-56.

<sup>9</sup> Gli asterischi segnalano che il documento è stato reperito su Internet, nei siti segnalati a fine bibliografia.

- Jorion, P., 1997. *Value at Risk: The New Benchmark for Controlling Market Risk*. Chicago: Irwin.
- J. P. Morgan, 1996. *RiskMetrics Technical Document*, New York.\*\*
- J. P. Morgan, 1997. *CreditMetrics Technical Document*, New York.\*\*
- Kupiec, P., H., 1995. "Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measurement Models", *The Journal of Derivatives*, Vol. 2, pp. 73-84.
- Kupiec, P.,H., e O'Brien, J.,M., 1996. "Bank Capital Regulation for Market Risk", LSE, Financial Markets Group, Esrc Research Centre, Special Paper No. 90.
- Kupiec, P.,H., e O'Brien, J.,M., 1995. "Internal Affairs", *Risk*, Vol. 8(1), No. 5.
- Lawrence, C., e Robinson, G., 1995. "How Safe is RiskMetrics?", *Risk*, Vol. 8(1), No.1.
- Lawrence, C., e Robinson, G., 1995. "Liquid Measures", *Risk*, Vol. 8(2), No. 7.
- Leong, K., 1996. "The Right Approach", *Risk*, Vol. 9(1), supplemento speciale.
- Linsmeier, T.,J., e Pearson, N.,D., 1996. "Risk Measurement: An Introduction to Value at Risk", University of Illinois, Working Paper. \*
- Liu, R.,Y., 1996. "VaR and VaR Derivatives", *Applied Derivatives Trading*.\*\*\*
- Longerstae, J., e Zangari, P., 1995. "A Transparent Tool", *Risk*, Vol. (1), No. 1.
- Lopez, J., A., 1998. "Methods for Evaluating Value-at-Risk Estimates", Federal Reserve Bank of New York, Research Paper No. 9802.
- Lopez, J.A., 1997. "Regulatory Evaluation of Value-at-Risk Models", Research and Market Analysis Group, Federal Reserve Bank of New York.
- Mahoney, J., M., 1997. "Forecast Biases in Value-at-Risk Estimations: Evidence from Foreign Exchange and Global Equity Portfolios".
- Marsella, M., e Sironi, A., 1997. *La Misurazione e la Gestione dei Rischi di Mercato*. Il Mulino.
- Marshal, C., e Siegel, M., 1996. "Value at Risk: Implementing a Risk Measurement Standard", The Wharton School, Working Paper 96-47.
- Metelli, F., 1995. *Il Rischio Finanziario* (pp.467-504). Il Sole 24 Ore, Libri.
- Morokoff, W., Lagnado, R., Owen, A., 1998. "Tolerance for Risk", *Risk*, giugno '98.
- Reed, N., 1996. "Variations on a Theme", *Risk*, Vol. 9(1), supplemento speciale.
- Schachter, B., 1997. "An Irreverent Guide to Value at Risk".\*\*\*\*
- Shimko, D., 1996. "Investors' Return on VaR", *Risk*, Vol. 9(2), No. 7.
- Smithson, C., 1996. "Value-at-Risk: understanding the various ways to calculate VaR", *Risk*, Vol. 9(1), No. 1.
- Wilson, D., 1995. "VaR in Operation", *Risk*, Vol. 8(2), No. 12.

Zangari, P., 1997. "Streamling the Market Risk Measurement Process", *RiskMetrics Monitor*, primo trimestre, pp. 29-35.\*\*

Siti Internet consultati:

<http://www.adtrading.com/adt9/varswap3.hts> (\*\*\*)

<http://www.contingencyanalysis.com>

<http://www.jpmorgan.com> (\*\*)

<http://www.polyhedron.it/rischio.htm>

<http://www.riskmetrics.reuters.com>

<http://www.ssrn.com> (\*)

<http://pw2.netcom.com/~bschacht/var/VARINTRO.htm> (\*\*\*\*)

1. Maria Cristina Marcuzzo [1985] "Yvan Violet Robinson (1903-1983)", pp. 134
2. Sergio Lugaresi [1986] "Le imposte nelle teorie del sovrappiù", pp. 26
3. Massimo D'Angelillo e Leonardo Paggi [1986] "PCI e socialdemocrazie europee. Quale riformismo?", pp. 158
4. Gian Paolo Caselli e Gabriele Pastrello [1986] "Un suggerimento hobsoniano su terziario ed occupazione: il caso degli Stati Uniti 1960/1983", pp. 52
5. Paolo Bosi e Paolo Silvestri [1986] "La distribuzione per aree disciplinari dei fondi destinati ai Dipartimenti, Istituti e Centri dell'Università di Modena: una proposta di riforma", pp. 25
6. Marco Lippi [1986] "Aggregations and Dynamic in One-Equation Econometric Models", pp. 64
7. Paolo Silvestri [1986] "Le tasse scolastiche e universitarie nella Legge Finanziaria 1986", pp. 41
8. Mario Forni [1986] "Storie familiari e storie di proprietà. Itinerari sociali nell'agricoltura italiana del dopoguerra", pp. 165
9. Sergio Paba [1986] "Gruppi strategici e concentrazione nell'industria europea degli elettrodomestici bianchi", pp. 56
10. Nerio Naldi [1986] "L'efficienza marginale del capitale nel breve periodo", pp. 54
11. Fernando Vianello [1986] "Labour Theory of Value", pp. 31
12. Piero Ganugi [1986] "Risparmio forzato e politica monetaria negli economisti italiani tra le due guerre", pp. 40
13. Maria Cristina Marcuzzo e Annalisa Rosselli [1986] "The Theory of the Gold Standard and Ricardo's Standard Commodity", pp. 30
14. Giovanni Solinas [1986] "Mercati del lavoro locali e carriere di lavoro giovanili", pp. 66
15. Giovanni Bonifati [1986] "Saggio dell'interesse e domanda effettiva. Osservazioni sul cap. 17 della General Theory", pp. 42
16. Marina Murat [1986] "Betwin old and new classical macroeconomics: notes on Lejonhufvud's notion of full information equilibrium", pp. 20
17. Sebastiano Brusco e Giovanni Solinas [1986] "Mobilità occupazionale e disoccupazione in Emilia Romagna", pp. 48
18. Mario Forni [1986] "Aggregazione ed esogeneità", pp. 13
19. Sergio Lugaresi [1987] "Redistribuzione del reddito, consumi e occupazione", pp. 17
20. Fiorenzo Sperotto [1987] "L'immagine neopopulista di mercato debole nel primo dibattito sovietico sulla pianificazione", pp. 34
21. M. Cecilia Guerra [1987] "Benefici tributari nel regime misto per i dividendi proposto dalla commissione Sarcinelli: una nota critica", pp. 9
22. Leonardo Paggi [1987] "Contemporary Europe and Modern America: Theories of Modernity in Comparative Perspective", pp. 38
23. Fernando Vianello [1987] "A Critique of Professor Goodwin's 'Critique of Sraffa'", pp. 12
24. Fernando Vianello [1987] "Effective Demand and the Rate of Profits. Some Thoughts on Marx, Kalecki and Sraffa", pp. 41
25. Anna Maria Sala [1987] "Banche e territorio. Approccio ad un tema geografico-economico", pp. 40
26. Enzo Mingione e Giovanni Mottura [1987] "Fattori di trasformazione e nuovi profili sociali nell'agricoltura italiana: qualche elemento di discussione", pp. 36
27. Giovanna Procacci [1988] "The State and Social Control in Italy During the First World War", pp. 18
28. Massimo Matteuzzi e Annamaria Simonazzi [1988] "Il debito pubblico", pp. 62
29. Maria Cristina Marcuzzo (a cura di) [1988] "Richard F. Kahn. A discipline of Keynes", pp. 118
30. Paolo Bosi [1988] "MICROMOD. Un modello dell'economia italiana per la didattica della politica fiscale", pp. 34
31. Paolo Bosi [1988] "Indicatori della politica fiscale. Una rassegna e un confronto con l'aiuto di MICROMOD", pp. 25
32. Giovanna Procacci [1988] "Protesta popolare e agitazioni operaie in Italia 1915-1918", pp. 45
33. Margherita Russo [1988] "Distretto Industriale e servizi. Uno studio dei trasporti nella produzione e nella vendita delle piastrelle", pp. 157
34. Margherita Russo [1988] "The effect of technical change on skill requirements: an empirical analysis", pp. 28
35. Carlo Grillenzoni [1988] "Identification, estimations of multivariate transfer functions", pp. 33
36. Nerio Naldi [1988] "Keynes' concept of capital", pp. 40
37. Andrea Ginzburg [1988] "Locomotiva Italia?", pp. 30
38. Giovanni Mottura [1988] "La 'persistenza' secolare. Appunti su agricoltura contadina ed agricoltura familiare nelle società industriali", pp. 40
39. Giovanni Mottura [1988] "L'anticamera dell'esodo. I contadini italiani della 'restaurazione contrattuale' fascista alla riforma fondiaria", pp. 40
40. Leonardo Paggi [1988] "Americanismo e riformismo. La socialdemocrazia europea nell'economia mondiale aperta", pp. 120
41. Annamaria Simonazzi [1988] "Fenomeni di isteresi nella spiegazione degli alti tassi di interesse reale", pp. 44
42. Antonietta Bassetti [1989] "Analisi dell'andamento e della casualità della borsa valori", pp. 12
43. Giovanna Procacci [1989] "State coercion and worker solidarity in Italy (1915-1918): the moral and political content of social unrest", pp. 41
44. Carlo Alberto Magni [1989] "Reputazione e credibilità di una minaccia in un gioco bargaining", pp. 56
45. Giovanni Mottura [1989] "Agricoltura familiare e sistema agroalimentare in Italia", pp. 84
46. Mario Forni [1989] "Trend, Cycle and 'Fortuitous cancellation': a Note on a Paper by Nelson and Plosser", pp. 4
47. Paolo Bosi, Roberto Golinelli, Anna Stagni [1989] "Le origini del debito pubblico e il costo della stabilizzazione", pp. 26
48. Roberto Golinelli [1989] "Note sulla struttura e sull'impiego dei modelli macroeconomici", pp. 21
49. Marco Lippi [1989] "A Short Note on Cointegration and Aggregation", pp. 11
50. Gian Paolo Caselli e Gabriele Pastrello [1989] "The Linkage between Tertiary and Industrial Sector in the Italian Economy: 1951-1988. From an External Dependence to an International One", pp. 40
51. Gabriele Pastrello [1989] "Francois quesnay: dal Tableau Zig-zag al Tableau Formule: una ricostruzione", pp. 48
52. Paolo Silvestri [1989] "Il bilancio dello stato", pp. 34
53. Tim Mason [1990] "Tre seminari di storia sociale contemporanea", pp. 26
54. Michele Lilla [1990] "The Aggregate Escape Rate Analysed through the Queueing Model", pp. 23
55. Paolo Silvestri [1990] "Sull'autonomia finanziaria dell'università", pp. 11
56. Paola Bertolini, Enrico Giovannetti [1990] "Uno studio di 'filiera' nell'agroindustria. Il caso del Parmigiano Reggiano", pp. 164

57. Paolo Bosi, Roberto Golinelli, Anna Stagni [1990] "Effetti macroeconomici, settoriali e distributivi dell'armonizzazione dell'IVA", pp. 24
58. Michele Lalla [1990] "Modelling Employment Spells from Emilia Labour Force Data", pp. 18
59. Andrea Ginzburg [1990] "Politica Nazionale e commercio internazionale", pp. 22
60. Andrea Giommi [1990] "La probabilità individuale di risposta nel trattamento dei dati mancanti", pp. 13
61. Gian Paolo Caselli e Gabriele Pastrello [1990] "The service sector in planned economies. Past experiences and future perspectives", pp. 32
62. Giovanni Solinas [1990] "Competenze, grandi industrie e distretti industriali. Il caso Magneti Marelli", pp. 23
63. Andrea Ginzburg [1990] "Debito pubblico, teorie monetarie e tradizione civica nell'Inghilterra del Settecento", pp. 30
64. Mario Forni [1990] "Incertezza, informazione e mercati assicurativi: una rassegna", pp. 37
65. Mario Forni [1990] "Misspecification in Dynamic Models", pp. 19
66. Gian Paolo Caselli e Gabriele Pastrello [1990] "Service Sector Growth in CPE's: An Unsolved Dilemma", pp. 28
67. Paola Bertolini [1990] "La situazione agro-alimentare nei paesi ad economia avanzata", pp. 20
68. Paola Bertolini [1990] "Sistema agro-alimentare in Emilia Romagna ed occupazione", pp. 65
69. Enrico Giovannetti [1990] "Efficienza ed innovazione: il modello "fondi e flussi" applicato ad una filiera agro-industriale", pp. 38
70. Margherita Russo [1990] "Cambiamento tecnico e distretto industriale: una verifica empirica", pp. 115
71. Margherita Russo [1990] "Distretti industriali in teoria e in pratica: una raccolta di saggi", pp. 119
72. Paolo Silvestri [1990] "La Legge Finanziaria. Voce dell'enciclopedia Europea Garzanti", pp. 8
73. Rita Patrineri [1990] "La popolazione italiana: problemi di oggi e di domani", pp. 57
74. Enrico Giovannetti [1990] "Illusioni ottiche negli andamenti delle Grandezze distributive: la scala mobile e l'appiattimento delle retribuzioni in una ricerca", pp. 120
75. Enrico Giovannetti [1990] "Crisi e mercato del lavoro in un distretto industriale: il bacino delle ceramiche. Sez. I", pp. 150
76. Enrico Giovannetti [1990] "Crisi e mercato del lavoro in un distretto industriale: il bacino delle ceramiche. Sez. II", pp. 145
78. Antonietta Bassetti e Costanza Torricelli [1990] "Una riqualificazione dell'approccio bargaining alla selezioni di portafoglio", pp. 4
77. Antonietta Bassetti e Costanza Torricelli [1990] "Il portafoglio ottimo come soluzione di un gioco bargaining", pp. 15
79. Mario Forni [1990] "Una nota sull'errore di aggregazione", pp. 6
80. Francesca Bergamini [1991] "Alcune considerazioni sulle soluzioni di un gioco bargaining", pp. 21
81. Michele Grillo e Michele Polo [1991] "Political Exchange and the allocation of surplus: a Model of Two-party competition", pp. 34
82. Gian Paolo Caselli e Gabriele Pastrello [1991] "The 1990 Polish Recession: a Case of Truncated Multiplier Process", pp. 26
83. Gian Paolo Caselli e Gabriele Pastrello [1991] "Polish firms: Private Vices Public Virtues", pp. 20
84. Sebastiano Brusco e Sergio Paba [1991] "Connessioni, competenza e capacità concorrenziale nell'industria della Sardegna", pp. 25
85. Claudio Grimaldi, Rony Hamaui, Nicola Rossi [1991] "Non Marketable assets and households' Portfolio Choice: a Case of Study of Italy", pp. 38
86. Giulio Righi, Massimo Baldini, Alessandra Brambilla [1991] "Le misure degli effetti redistributivi delle imposte indirette: confronto tra modelli alternativi", pp. 47
87. Roberto Fanfani, Luca Lanini [1991] "Innovazione e servizi nello sviluppo della meccanizzazione agricola in Italia", pp. 35
88. Antonella Caiumi e Roberto Golinelli [1992] "Stima e applicazioni di un sistema di domanda Almost Ideal per l'economia italiana", pp. 34
89. Maria Cristina Marcuzzo [1992] "La relazione salari-occupazione tra rigidità reali e rigidità nominali", pp. 30
90. Mario Biagioli [1992] "Employee financial participation in enterprise results in Italy", pp. 50
91. Mario Biagioli [1992] "Wage structure, relative prices and international competitiveness", pp. 50
92. Paolo Silvestri e Giovanni Solinas [1993] "Abbandoni, esiti e carriera scolastica. Uno studio sugli studenti iscritti alla Facoltà di Economia e Commercio dell'Università di Modena nell'anno accademico 1990/1991", pp. 30
93. Gian Paolo Caselli e Luca Martinelli [1993] "Italian GPN growth 1890-1992: a unit root or segmented trend representation?", pp. 30
94. Angela Politi [1993] "La rivoluzione fraintesa. I partigiani emiliani tra liberazione e guerra fredda, 1945-1955", pp. 55
95. Alberto Rinaldi [1993] "Lo sviluppo dell'industria metalmeccanica in provincia di Modena: 1945-1990", pp. 70
96. Paolo Emilio Mistrulli [1993] "Debito pubblico, intermediari finanziari e tassi d'interesse: il caso italiano", pp. 30
97. Barbara Pistoresi [1993] "Modelling disaggregate and aggregate labour demand equations. Cointegration analysis of a labour demand function for the Main Sectors of the Italian Economy: 1950-1990", pp. 45
98. Giovanni Bonifati [1993] "Progresso tecnico e accumulazione di conoscenza nella teoria neoclassica della crescita endogena. Una analisi critica del modello di Romer", pp. 50
99. Marcello D'Amato e Barbara Pistoresi [1994] "The relationship(s) among Wages, Prices, Unemployment and Productivity in Italy", pp. 30
100. Mario Forni [1994] "Consumption Volatility and Income Persistence in the Permanent Income Model", pp. 30
101. Barbara Pistoresi [1994] "Using a VECM to characterise the relative importance of permanent and transitory components", pp. 28
102. Gian Paolo Caselli e Gabriele Pastrello [1994] "Polish recovery form the slump to an old dilemma", pp. 20
103. Sergio Paba [1994] "Imprese visibili, accesso al mercato e organizzazione della produzione", pp. 20
104. Giovanni Bonifati [1994] "Progresso tecnico, investimenti e capacità produttiva", pp. 30
105. Giuseppe Marotta [1994] "Credit view and trade credit: evidence from Italy", pp. 20
106. Margherita Russo [1994] "Unit of investigation for local economic development policies", pp. 25
107. Luigi Brighi [1995] "Monotonicity and the demand theory of the weak axioms", pp. 20
108. Mario Forni e Lucrezia Reichlin [1995] "Modelling the impact of technological change across sectors and over time in manufacturing", pp. 25
109. Marcello D'Amato and Barbara Pistoresi [1995] "Modelling wage growth dynamics in Italy: 1960-1990", pp. 38
110. Massimo Baldini [1995] "INDIMOD. Un modello di microsimulazione per lo studio delle imposte indirette", pp. 37
111. Paolo Bosi [1995] "Regionalismo fiscale e autonomia tributaria: l'emersione di un modello di consenso", pp. 38
112. Massimo Baldini [1995] "Aggregation Factors and Aggregation Bias in Consumer Demand", pp. 33
113. Costanza Torricelli [1995] "The information in the term structure of interest rates. Can stochastic models help in resolving the puzzle?", pp. 25
114. Margherita Russo [1995] "Industrial complex, pôle de développement, distretto industriale. Alcune questioni sulle unità di indagine nell'analisi dello sviluppo", pp. 45
115. Angelika Moryson [1995] "50 Jahre Deutschland, 1945 - 1995" pp. 21
116. Paolo Bosi [1995] "Un punto di vista macroeconomico sulle caratteristiche di lungo periodo del nuovo sistema pensionistico italiano", pp. 32
117. Gian Paolo Caselli e Salvatore Curatolo [1995] "Esistono relazioni stimabili fra dimensione ed efficienza delle istituzioni e crescita produttiva? Un esercizio nello spirito di D.C. North", pp. 11
118. Mario Forni e Marco Lippi [1995] "Permanent income, heterogeneity and the error correction mechanism", pp. 21
119. Barbara Pistoresi [1995] "Co-movements and convergence in international output. A Dynamic Principal Components Analysis" pp. 14
120. Mario Forni e Lucrezia Reichlin [1995] "Dynamic common factors in large cross-section" pp. 17
121. Giuseppe Marotta [1995] "Il credito commerciale in Italia: una nota su alcuni aspetti strutturali e sulle implicazioni di politica monetaria", pp. 20
122. Giovanni Bonifati [1995] "Progresso tecnico, concorrenza e decisioni di investimento: una analisi delle determinanti di lungo periodo degli investimenti" pp. 25
123. Giovanni Bonifati [1995] "Cambiamento tecnico e crescita endogena: una valutazione critica delle ipotesi del modello di Romer" pp. 21
124. Barbara Pistoresi e Marcello D'Amato [1995] "La riservatezza del banchiere centrale è un bene o un male? Effetti dell'informazione incompleta sul benessere in un modello di politica monetaria", pp. 32
125. Barbara Pistoresi [1995] "Radici unitarie e persistenza: l'analisi univariata delle fluttuazioni economiche", pp. 33
126. Barbara Pistoresi e Marcello D'Amato [1995] "Co-movements in European real outputs" pp. 20
127. Antonio Ribba [1996] "Ciclo economico, modello lineare-stocastico, forma dello spettro delle variabili macroeconomiche" pp. 31
128. Carlo Alberto Magni [1996] "Repeatable and una tantum real options a dynamic programming approach" pp. 23
129. Carlo Alberto Magni [1996] "Opzioni reali d'investimento e interazione competitiva: programmazione dinamica stocastica in optimal stopping" pp. 26
130. Carlo Alberto Magni [1996] "Vaghezza e logica fuzzy nella valutazione di un'opzione reale" pp. 20
131. Giuseppe Marotta [1996] "Does trade credit redistribution thwart monetary policy? Evidence from Italy" pp. 20
132. Mauro Dell'Amico e Marco Trubian [1996] "Almost-optimal solution of large weighted euclidian problems" pp. 30
133. Carlo Alberto Magni [1996] "Un esempio di investimento industriale con interazione competitiva e avversione al rischio" pp. 20
134. Margherita Russo, Peter Børkey, Emilio Cubel, François Lévêque, Francisco Mas [1996] "Local sustainability and competitiveness: the case of the ceramic tile industry" pp. 66
135. Margherita Russo [1996] "Camionetto tecnico e relazioni tra imprese" pp. 190
136. David Avra Lane, Irene Poli, Michele Lalla, Alberto Roverato [1996] "Lezioni di probabilità e inferenza statistica" pp. 288
137. David Avra Lane, Irene Poli, Michele Lalla, Alberto Roverato [1996] "Lezioni di probabilità e inferenza statistica - Esercizi svolti -" pp. 302
138. Barbara Pistoresi [1996] "Is an Aggregate Error Correction Model Representative of Disaggregate Behaviours? An example" pp. 24
139. Luisa Malaguti e Costanza Torricelli [1996] "Monetary policy and the term structure of interest rates", pp. 30
140. Mauro Dell'Amico, Martine Labbé, Francesco Maffioli [1996] "Exact solution of the SONET Ring Loading Problem", pp. 20
141. Mauro Dell'Amico, R.J.M. Vaessens [1996] "Flow and open shop scheduling on two machines with transportation times and machine-independent processing times in NP-hard", pp. 10
142. M. Dell'Amico, F. Maffioli, A. Sciamechen [1996] "A Lagrangean Heuristic for the Pirze Collecting Travelling Salesman Problem", pp. 14
143. Massimo Baldini [1996] "Inequality Decomposition by Income Source in Italy - 1987 - 1993", pp. 20
144. Graziella Bertocchi [1996] "Trade, Wages, and the Persistence of Underdevelopment" pp. 20
145. Graziella Bertocchi and Fabio Canova [1996] "Did Colonization matter for Growth? An Empirical Exploration into the Historical Causes of Africa's Underdevelopment" pp. 32
146. Paola Bertolini [1996] "La modernization de l'agriculture italienne et le cas de l'Emilie Romagne" pp. 20
147. Enrico Giovannetti [1996] "Organisation industrielle et développement local: le cas de l'agroindustrie in Emilie Romagne" pp. 18
148. Maria Elena Bontempi e Roberto Golinelli [1996] "Le determinanti del leverage delle imprese: una applicazione empirica ai settori industriali dell'economia italiana" pp. 31
149. Paola Bertolini [1996] "L'agriculture et la politique agricole italienne face aux recents scenarios", pp. 20
150. Enrico Giovannetti [1996] "Il grado di utilizzo della capacità produttiva come misura dei costi di transazione: una rilettura di "Nature of the Firm" di R. Coase", pp. 75
151. Enrico Giovannetti [1996] "Il 1° ciclo del Diploma Universitario Economia e Amministrazione delle Imprese", pp. 25
152. Paola Bertolini, Enrico Giovannetti, Giulia Santacaterina [1996] "Il Settore del Verde Pubblico. Analisi della domanda e valutazione economica dei benefici", pp. 35
153. Giovanni Solinas [1996] "Sistemi produttivi del Centro-Nord e del Mezzogiorno. L'industria delle calzature", pp. 55
154. Tindara Addabbo [1996] "Married Women's Labour Supply in Italy: in a Regional Perspective", pp. 85
155. Paolo Silvestri, Giuseppe Catalano, Cristina Bevilacqua [1996] "Le tasse universitarie e gli interventi per il diritto allo studio: la prima fase di applicazione di una nuova normativa" pp. 159
156. Sebastiano Brusco, Paolo Bertossi, Margherita Russo [1996] "L'industria dei rifiuti urbani in Italia", pp. 25
157. Paolo Silvestri, Giuseppe Catalano [1996] "Le risorse del sistema universitario italiano: finanziamento e governo" pp. 400
158. Carlo Alberto Magni [1996] "Un semplice modello di opzione di differimento e di vendita in ambito discreto", pp. 10
159. Tito Pietra, Paolo Siconolfi [1996] "Fully Revealing Equilibria in Sequential Economies with Asset Markets" pp. 17
160. Tito Pietra, Paolo Siconolfi [1996] "Extrinsic Uncertainty and the Informational Role of Prices" pp. 42
161. Paolo Bertella Farnetti [1996] "Il negro e il rosso. Un precedente non esplorato dell'integrazione afroamericana negli Stati Uniti" pp. 26
162. David Lane [1996] "Is what is good for each best for all? Learning from others in the information contagion model" pp. 18

163. Antonio Ribba [1996] "A note on the equivalence of long-run and short-run identifying restrictions in cointegrated systems" pp. 10
164. Antonio Ribba [1996] "Scomposizioni permanenti-transitorie in sistemi contegrati con una applicazione a dati italiani" pp. 23
165. Mario Forni, Sergio Paba [1996] "Economic Growth, Social Cohesion and Crime" pp. 20
166. Mario Forni, Lucrezia Reichlin [1996] "Let's get real: a factor analytical approach to disaggregated business cycle dynamics" pp. 25
167. Marcello D'Amato e Barbara Pistoiesi [1996] "So many Italies: Statistical Evidence on Regional Cohesion" pp. 31
168. Elena Bonfiglioli, Paolo Bosi, Stefano Toso [1996] "L'equità del contributo straordinario per l'Europa" pp. 20
169. Graziella Bertocchi, Michael Spagat [1996] "Il ruolo dei licei e delle scuole tecnico-professionali tra progresso tecnologico, conflitto sociale e sviluppo economico" pp. 37
170. Gianna Boero, Costanza Torricelli [1997] "The Expectations Hypothesis of the Term Structure of Interest Rates: Evidence for Germany" pp. 15
171. Mario Forni, Lucrezia Reichlin [1997] "National Policies and Local Economies: Europe and the US" pp. 22
172. Carlo Alberto Magni [1997] "La trappola del Roe e la tridimensionalità del Van in un approccio sistemico" pp. 16
173. Mauro Dell'Amico [1997] "A Linear Time Algorithm for Scheduling Outforests with Communication Delays on Two or Three Processor" pp. 18
174. Paolo Bosi [1997] "Aumentare l'età pensionabile fa diminuire la spesa pensionistica? Ancora sulle caratteristiche di lungo periodo della riforma Dini" pp. 13
175. Paolo Bosi e Massimo Matteuzzi [1997] "Nuovi strumenti per l'assistenza sociale" pp. 31
176. Mauro Dell'Amico, Francesco Maffioli e Marco Trubian [1997] "New bounds for optimum traffic assignment in satellite communication" pp. 21
177. Carlo Alberto Magni [1997] "Paradossi, inverosimiglianze e contraddizioni del Van: operazioni certe" pp. 9
178. Barbara Pistoiesi e Marcello D'Amato [1997] "Persistence of relative unemployment rates across Italian regions" pp. 25
179. Margherita Russo, Franco Cavedoni e Riccardo Pianesani [1997] "Le spese ambientali dei Comuni in provincia di Modena, 1993-1995" pp. 23
180. Gabriele Pastrello [1997] "Time and Equilibrium. Two Elusive Guests in the Keynes-Hawtrey-Robertson Debate in the Thirties" pp. 25
181. Luisa Malaguti e Costanza Torricelli [1997] "The Interaction Between Monetary Policy and the Expectation Hypothesis of the Term Structure of Interest rates in a N-Period Rational Expectation Model" pp. 27
182. Mauro Dell'Amico [1997] "On the Continuous Relaxation of Packing Problems - Technical Note" pp. 8
183. Stefano Bordini [1997] "Prova di Idoneità di Informatica Dispensa Esercizi Excel 5" pp. 49
184. Francesca Bergamini e Stefano Bordini [1997] "Una verifica empirica di un nuovo metodo di selezione ottima di portafoglio" pp. 22
185. Gian Paolo Caselli e Maurizio Battini [1997] "Following the tracks of atkinson and micklewright the changing distribution of income and earnings in poland from 1989 to 1995" pp. 21
186. Mauro Dell'Amico e Francesco Maffioli [1997] "Combining Linear and Non-Linear Objectives in Spanning Tree Problems" pp. 21
187. Gianni Ricci e Vanessa Debbia [1997] "Una soluzione evolutiva in un gioco differenziale di lotta di classe" pp. 14
188. Fabio Canova e Eva Ortega [1997] "Testing Calibrated General Equilibrium Model" pp. 34
189. Fabio Canova [1997] "Does Detrending Matter for the Determination of the Reference Cycle and the Selection of Turning Points?" pp. 35
190. Fabio Canova e Gianni De Nicolò [1997] "The Equity Premium and the Risk Free Rate: A Cross Country, Cross Maturity Examination" pp. 41
191. Fabio Canova e Angel J. Ubide [1997] "International Business Cycles, Financial Market and Household Production" pp. 32
192. Fabio Canova e Gianni De Nicolò [1997] "Stock Returns, Term Structure, Inflation and Real Activity: An International Perspective" pp. 33
193. Fabio Canova e Morten Ravn [1997] "The Macroeconomic Effects of German Unification: Real Adjustments and the Welfare State" pp. 34
194. Fabio Canova [1997] "Detrending and Business Cycle Facts" pp. 40
195. Fabio Canova e Morten O. Ravn [1997] "Crossing the Rio Grande: Migrations, Business Cycle and the Welfare State" pp. 37
196. Fabio Canova e Jane Marrinan [1997] "Sources and Propagation of International Output Cycles: Common Shocks or Transmission?" pp. 41
197. Fabio Canova e Albert Marcet [1997] "The Poor Stay Poor: Non-Convergence Across Countries and Regions" pp. 44
198. Carlo Alberto Magni [1997] "Un Criterio Strutturalista per la Valutazione di Investimenti" pp. 17
199. Stefano Bordini [1997] "Elaborazione Automatica dei Dati" pp. 60
200. Paolo Bertella Farnetti [1997] "The United States and the Origins of European Integration" pp. 19
201. Paolo Bosi [1997] "Sul Controllo Dinamico di un Sistema Pensionistico a Ripartizione di Tipo Contributivo" pp. 17
202. Paola Bertolini [1997] "European Union Agricultural Policy: Problems and Perspectives" pp. 18
203. Stefano Bordini [1997] "Supporti Informatici per la Ricerca delle soluzioni di Problemi Decisionali" pp. 30
204. Carlo Alberto Magni [1997] "Paradossi, Inverosimiglianze e Contraddizioni del Van: Operazioni Aleatorie" pp. 10
205. Carlo Alberto Magni [1997] "Tir, Roe e Van: Distorsioni linguistiche e Cognitive nella Valutazione degli Investimenti" pp. 17
206. Gisella Facchinetti, Roberto Ghiselli Ricci e Silvia Muzzioli [1997] "New Methods For Ranking Triangular Fuzzy Numbers: An Investment Choice" pp. 9
207. Mauro Dell'Amico e Silvano Martello [1997] "Reduction of the Three-Partition Problem" pp. 16
208. Carlo Alberto Magni [1997] "IRR, ROE and NPV: a Systemic Approach" pp. 20
209. Mauro Dell'Amico, Andrea Lodi e Francesco Maffioli [1997] "Solution of the cumulative assignment problem with a well-structured tabu search method" pp. 25
210. Carlo Alberto Magni [1997] "La definizione di investimento e criterio del Tir ovvero: la realtà inventata" pp. 16
211. Carlo Alberto Magni [1997] "Critica alla definizione classica di investimento: un approccio sistemico" pp. 17
212. Alberto Roverato [1997] "Asymptotic prior to posterior analysis for graphical gaussian models" pp. 8
213. Tindara Addabbo [1997] "Povertà nel 1995 analisi statica e dinamica sui redditi familiari" pp. 64
214. Gian Paolo Caselli e Franca Manghi [1997] "La transizione da piano a mercato e il modello di Ising" pp. 15
215. Tindara Addabbo [1998] "Lavoro non pagato e reddito esteso: un'applicazione alle famiglie italiane in cui entrambi i coniugi sono lavoratori dipendenti" pp. 54
216. Tindara Addabbo [1998] "Probabilità di occupazione e aspettative individuali" pp. 36
217. Lara Magnani [1998] "Transazioni, contratti e organizzazioni: una chiave di lettura della teoria economica dell'organizzazione" pp. 39
218. Michele Lalla, Rosella Molinari e Maria Grazia Modena [1998] "La progressione delle carriere: i percorsi in cardiologia" pp. 46
219. Lara Magnani [1998] "L'organizzazione delle transazioni di subfornitura nel distretto industriale" pp. 40
220. Antonio Ribba [1998] "Recursive VAR orderings and identification of permanent and transitory shocks" pp. 12
221. Antonio Ribba [1998] "Granger-causality and exogeneity in cointegrated Var models" pp. 5
222. Luigi Brighi e Marcello D'Amato [1998] "Optimal Procurement in Multiproduct Monopoly" pp. 25
223. Paolo Bosi, Maria Cecilia Guerra e Paolo Silvestri [1998] "La spesa sociale nel comune Modena" Rapporto intermedio pp. 37
224. Mario Forni e Marco Lippi [1998] "On the Microfoundations of Dynamic Macroeconomics" pp. 22
225. Roberto Ghiselli Ricci [1998] "Nuove Proposte di Ordinamento di Numeri Fuzzy. Una Applicazione ad un Problema di Finanziamento" pp. 7
226. Tommaso Minerva [1998] "Internet Domande e Risposte" pp. 183
227. Tommaso Minerva [1998] "Elementi di Statistica Computazione. Parte Prima: Il Sistema Operativo Unix ed il Linguaggio C" pp. 57
228. Tommaso Minerva and Irene Poli [1998] "A Genetic Algorithms Selection Method for Predictive Neural Nets and Linear Models" pp. 60
229. Tommaso Minerva and Irene Poli [1998] "Building an ARMA Model by using a Genetic Algorithm" pp. 60
230. Mauro Dell'Amico e Paolo Toth [1998] "Algorithms and Codes for Dense Assignment Problems: the State of the Art" pp. 35
231. Ennio Cavazzuti e Nicoletta Pacchiarotti [1998] "How to play an hotelling game in a square town" pp. 12
232. Alberto Roverato e Irene Poli [1998] "Un algoritmo genetico per la selezione di modelli grafici" pp. 11
233. Marcello D'Amato e Barbara Pistoiesi [1998] "Delegation of Monetary Policy to a Central Banker with Private Information" pp. 15
234. Graziella Bertocchi e Michael Spagat [1998] "The Evolution of Modern Educational Systems. Technical vs. General Education, Distributional Conflict, and Growth" pp. 31
235. André Dumas [1998] "Le système monétaire Européen" pp. 24
236. Gianna Boero, Gianluca Di Lorenzo e Costanza Torricelli [1998] "The influence of short rate predictability and monetary policy on tests of the expectations hypothesis: some comparative evidence" pp. 30
237. Carlo Alberto Magni [1998] "A systemic rule for investment decisions: generalizations of the traditional DCF criteria and new conceptions" pp. 30
238. Marcello D'Amato e Barbara Pistoiesi [1998] "Interest Rate Spreads Between Italy and Germany: 1995-1997" pp. 16
239. Paola Bertolini e Alberto Bertacchini [1998] "Il distretto di lavorazioni carni suine in provincia di Modena" pp. 29
240. Costanza Torricelli e Gianluca Di Lorenzo [1998] "Una nota sui fondamenti matematico-finanziari della teoria delle aspettative della struttura della scadenza" pp. 15
241. Christophe Croux, Mario Forni e Lucrezia Reichlin [1998] "A Measure of Comovement for Economic Indicators: Theory and Empirics" pp. 23
242. Carlo Alberto Magni [1998] "Note sparse sul dilemma del prigioniero (e non solo)" pp. 13
243. Gian Paolo Caselli [1998] "The future of mass consumption society in the former planned economies: a macro approach" pp. 21
244. Mario Forni, Marc Hallin, Marco Lippi e Lucrezia Reichlin [1998] "The generalized dynamic factor model: identification and estimation" pp. 35
245. Carlo Alberto Magni [1998] "Pictures, language and research: the case of finance and financial mathematics" pp. 35
246. Luigi Brighi [1998] "Demand and generalized monotonicity" pp. 21
247. Mario Forni e Lucrezia Reichlin [1998] "Risk and potential insurance in Europe" pp. 20
248. Tommaso Minerva, Sandra Paterlini e Irene Poli [1998] "A Genetic Algorithm for predictive Neural Network Design (GANND). A Financial Application" pp. 12
249. Gian Paolo Caselli Maurizio Battini [1998] "The Changing Distribution of Earnings in Poland from 1989 to 1996" pp. 9
250. Mario Forni, Sergio Paba [1998] "Industrial Districts, Social Environment and Local Growth" Evidence from Italy pp. 27
251. Lara Magnani [1998] "Un'analisi del distretto industriale fondata sulla moderna teoria economica dell'organizzazione" pp. 46
252. Mario Forni, Lucrezia Reichlin [1998] "Federal Policies and Local Economies: Europe and the US" pp. 24
253. Luigi Brighi [1998] "A Case of Optimal Regulation with Multidimensional Private Information" pp. 20
254. Barbara Pistoiesi, Stefania Luppi [1998] "Gli investimenti diretti esteri nell'America Latina e nel Sud Est Asiatico: 1982-1995" pp. 27
255. Paola Mengoli, Margherita Russo [1998] "Technical and Vocational Education and Training in Italy: Structure and Changes at National and Regional Level" pp. 25
256. Tindara Addabbo [1998] "On-the-Job Search a Microeconomic Analysis on Italian Data" pp. 29
257. Lorenzo Bertucelli [1999] "Il paternalismo industriale: una discussione storiografica" pp. 21
258. Mario Forni e Marco Lippi [1999] "The generalized dynamic factor model: representation theory" pp. 25
259. Andrea Ginzburg e Annamaria Simonazzi [1999] "Foreign debt cycles and the 'Gibson Paradox': an interpretative hypothesis" pp. 38
260. Paolo Bosi [1999] "La riforma della spesa per assistenza dalla Commissione Onofri ad oggi: una valutazione in corso d'opera" pp. 56
261. Marcello D'Amato e Barbara Pistoiesi [1999] "Go and soothe the row. Delegation of monetary policy under private information" pp. 23
262. Michele Lalla [1999] "Sampling, Maintenance, and Weighting Schemes for Longitudinal Surveys: a Case Study of the Textile and Clothing Industry" pp. 27