

\\ 290 \\

Piani Formalmente Euclidei

di

Consolato Pellegrino*
Carla Fiori**

Dicembre 1999

* Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia
Dipartimento di Matematica
Via Campi, 213/B
41100 Modena (Italia)
e-mail: pellegrino@unimo.it

** Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia
Dipartimento di Economia Politica
Via Berengario, 51
41100 Modena (Italia)
e-mail: fiori@unimo.it

PIANI FORMALMENTE EUCLIDEI (*)

Sembrirebbe un paradosso, ma non lo è: alzando troppo il livello dell'insegnamento [della Geometria], il prodotto – cioè quello che gli studenti effettivamente acquisiscono – diminuisce, anzi, oltre un certo limite di difficoltà crolla «verticalmente» [...]

Un approccio multiforme e graduale dava invece la possibilità agli studenti di entrare (o di avanzare) nella comprensione della Geometria, e di formarsi delle basi utili sia per corsi più specialistici nel secondo biennio, sia per capire la Matematica elementare «dall'alto».

Francesco SPERANZA (1988, p. 13)

Le idee matematiche hanno origine a livello empirico... Ma una volta che esse sono state concepite in questo modo, l'argomento comincia a vivere di vita propria e viene paragonato con maggiore facilità a qualcosa di creativo, governato quasi del tutto da motivazioni estetiche [...]

Mentre si diffonde, o dopo numerosi incroci «astratti», la disciplina matematica rischia la degenerazione [...] qualora si raggiunga tale stadio, l'unico rimedio mi sembra essere il ritorno rivivificante alla fonte: una nuova introduzione di idee più o meno direttamente empiriche.

John von NEUMANN (1947 ed. 1961, p. 9)

Attualmente all'Università, nei corsi di Geometria, è invalsa la tendenza di presentare i piani e gli spazi (affini o proiettivi) a partire da spazi vettoriali su un campo \mathbf{K} . In particolare il piano ordinario è caratterizzato a partire da un piano affine sul campo \mathbf{R} dei numeri reali in cui si fissa la metrica euclidea. In questa *impostazione algebrica* la congruenza di segmenti e l'ortogonalità delle rette vengono a dipendere da \mathbf{R} e dal suo ordinamento.

La suddetta impostazione di fatto tiene nascosti – non solo alle nuove leve di ingegneri, informatici, fisici, astronomi, ma anche a quelle dei matematici – importanti aspetti geometrici fondazionali che, come evidenziato da Hilbert nei *Grundlagen der Geometrie* (la prima edizione è del 1899), si possono ricondurre al teorema (dei triangoli omologici) di Desargues ed al teorema di Pappo-Pascal (il primo dei quali è valido in un qualunque piano, affine o proiettivo, costruito a partire da un corpo \mathbf{K} mentre il secondo è valido solo se \mathbf{K} è commutativo).

In effetti le suddette indicazioni di Hilbert hanno aperto un filone di ricerche che “procedendo in senso inverso” alla impostazione algebrica ha portato alla *coordinatizzazione dei piani*, affini o proiettivi, definiti mediante assiomi geometrici (cfr. Hall 1943; per una rassegna sui primi studi al riguardo cfr. Bruck 1955). In particolare queste ricerche hanno evidenziato che a partire da un piano proiettivo (o affine) π desarguesiano (ossia un piano in cui vale il teorema dei triangoli omologici) è possibile costruire un corpo \mathbf{K} tale che i

* Lavoro eseguito nell'ambito delle attività finanziate dal MURST.

punti di π si rappresentano mediante coordinate in \mathbf{K} e le rette mediante equazioni lineari (cfr. ad es. Segre 1961, pp. 157 e segg.). Tale corpo, che è unico a meno di isomorfismi, risulta commutativo se il piano è pappiano ⁽³⁾, ossia soddisfa il teorema di Pappo-Pascal.

È naturale quindi porsi il problema di stabilire quali condizioni aggiungere ad un piano affine pappiano π per poter:

- a) trattare le nozioni di *congruenza* (dei segmenti) e di *ortogonalità* (delle rette);
- b) definire le nozioni di *similitudine* ed *isometria*;
- c) esplicitare le condizioni analitiche che consentono di caratterizzare sia le nozioni di *congruenza* e *ortogonalità*, sia quelle di *similitudine* ed *isometria*;
- d) stabilire quando π è *formalmente euclideo* (ossia quando le equazioni delle affinità e le condizioni citate al punto precedente coincidono con quelle valide nel piano ordinario).

In questa nota, dopo aver brevemente illustrato la coordinatizzazione dei piani affini pappiani (da noi dettagliatamente illustrata in Fiori e Pellegrino 1995 e 1996), indicheremo un modo per raggiungere il suddetto obiettivo a partire da un prototipo di “triangolo rettangolo isoscele”. Ciò evidenzierà che per caratterizzare il piano ordinario non è necessario partire da \mathbf{R} : *la classe dei piani affini che sono formalmente euclidei coincide con quella dei piani staudtiani* (la cui definizione prescinde dall’ordinamento delle rette) ⁽⁴⁾. Questo tipo di approccio, a differenza di quello algebrico, permetterà di evidenziare che i piani più “esotici” non sono da ricercare tra i piani finiti ma tra quelli (finiti o no) che hanno una sola retta isotropa.

1. – PRELIMINARI

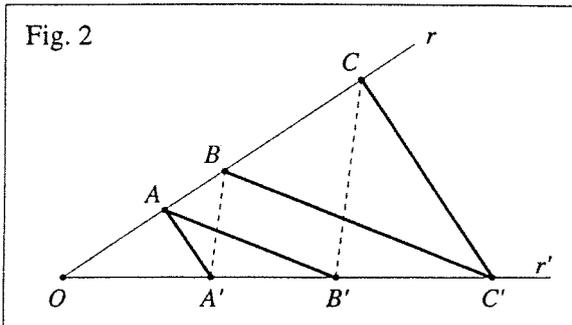
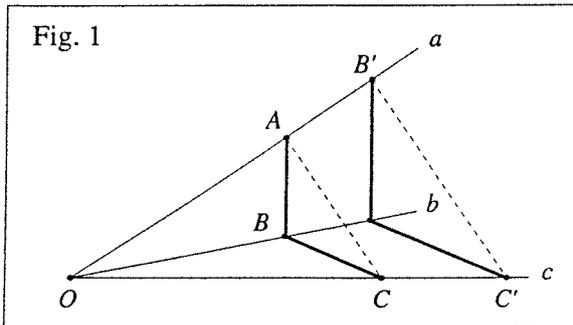
Dato un insieme non vuoto \mathcal{P} , i cui elementi chiameremo punti, ed un insieme \mathcal{R} di sottoinsiemi non vuoti di \mathcal{P} , i cui elementi chiameremo rette, diciamo che $\pi = (\mathcal{P}, \mathcal{R})$ è un *piano affine* (o più semplicemente *piano*) se soddisfa i seguenti assiomi:

- A) *Due qualsiasi punti distinti appartengono ad una ed una sola retta.*
- B) *Per ogni retta r e per ogni punto P esiste una ed una sola retta r' passante per P e parallela ad r (due rette r ed r' si dicono *parallele* se $r = r'$ oppure $r \cap r' = \emptyset$).*
- C) *Esistono almeno tre punti non appartenenti alla stessa retta.*

Le rette di π hanno tutte la stessa cardinalità che se finita, come accade nel caso dei piani costruiti a partire da un campo finito, è detta *ordine* di π . La relazione di parallelismo, indicata con “ \parallel ”, è una relazione di equivalenza le cui classi sono dette *direzioni*.

³ Per un teorema di Hessenberg del 1905 ogni piano pappiano è desarguesiano.

⁴ Karl Georg von Staudt (1797-1867), allievo di Gauss, in un volume del 1848, abbandonando il metodo di deduzione metrico-proiettivo, ha fondato la geometria proiettiva su concetti e postulati esclusivamente grafici dandole un indirizzo autonomo e puramente sintetico. Una sistemazione critica dell’opera di von Staudt si trova in un volume di Enriques del 1898 che, oltre a varie edizioni e numerose ristampe in italiano, ha avuto una traduzione in tedesco nel 1903 (voluta da F. Klein), una in francese nel 1930 ed una litografata in inglese per gli studenti delle università americane.



Come d'uso, diremo *allineati* punti che appartengono ad una medesima retta ed indicheremo con AB la retta individuata dai punti A e B , ecc.

Dati due piani affini $\pi = (\mathcal{P}, \mathcal{R})$ e $\pi' = (\mathcal{P}', \mathcal{R}')$, diciamo che una biiezione σ di \mathcal{P} in \mathcal{P}' è una *affinità* di π in π' se l'immagine di una qualunque retta di π è una retta di π' .

Dalla precedente definizione segue che una affinità manda rette parallele in rette parallele e che le affinità di un piano in sé stesso formano un gruppo. Ovviamente *una affinità manda punti allineati in punti allineati*, ma si può dimostrare che vale anche il viceversa.

Si dice che un piano affine π è *desarguesiano* se vale il seguente assioma (fig. 1):

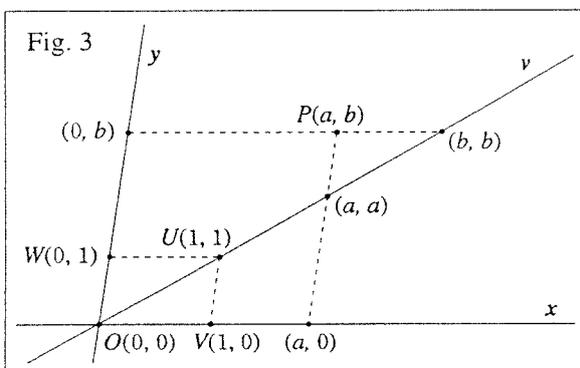
D) Qualunque siano i triangoli ABC ed $A'B'C'$ se le rette AA' , BB' , CC' , si incontrano in uno stesso punto (o sono parallele), si ha che se $AB \parallel A'B'$ e $BC \parallel B'C'$; allora $AC \parallel A'C'$. ⁽⁵⁾

Si dice che un piano affine π è *pappiano* se vale il seguente assioma (fig. 2):

P) Qualunque siano le rette r ed r' che si intersecano in un punto O ed i punti A, B, C ed A', B', C' , rispettivamente su r ed r' , distinti tra loro e da O , si ha che se $AA' \parallel CC'$ e $AB' \parallel BC'$; allora $BA' \parallel CB'$.

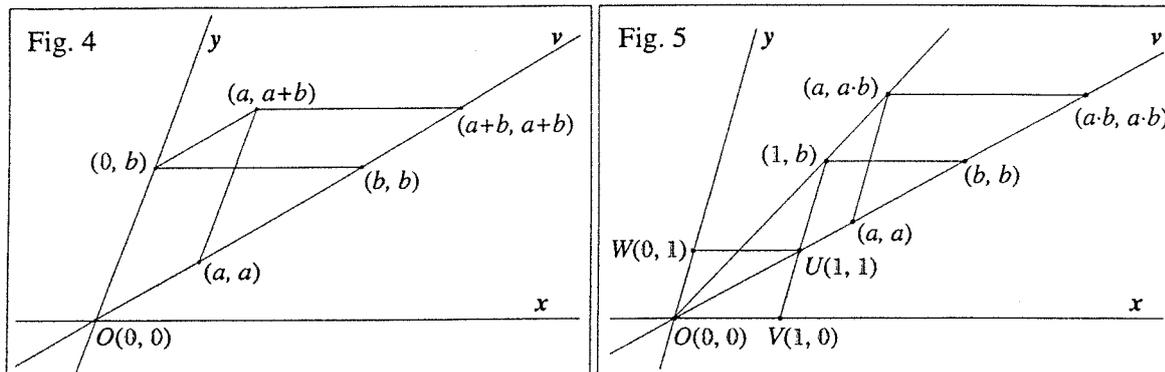
Si dice che un piano affine desarguesiano π è *staudtiano* se soddisfa il seguente assioma:

S) Ogni affinità di π in sé avente tre distinte direzioni unite, conserva la direzione delle rette.



Per introdurre un *sistema di riferimento* in un piano affine π basta fissare una terna (O, V, W) di suoi punti non allineati (fig. 3): il punto O fungerà da *origine*, la retta $x = OV$ fungerà da *asse delle ascisse*, la retta $y = OW$ da *asse delle ordinate*, il punto U d'intersezione della parallela all'asse x passante per W con la parallela all'asse y passante per V fungerà da *punto unità*. Nel seguito chiameremo

⁵ A partire da **D** si può dimostrare il suo inverso. Hilbert, nei *Grundlagen*, dà un esempio di piano non desarguesiano. Nello spazio, invece, **D** vale sempre: è una conseguenza degli assiomi di collegamento.



bisettrice principale la retta $v = OU$ e bisettrice secondaria la retta w passante per O e parallela alla retta VW .

Consideriamo, come *insieme delle coordinate* di un piano affine π , un insieme \mathcal{K} di simboli, fra cui "0" ed "1", in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei punti della retta v tale che O ed U siano rispettivamente i corrispondenti di 0 ed 1.

Preso un punto P di π se $P \in v$ e P è il corrispondente di $x \in \mathcal{K}$, allora *assegniamo a P le coordinate* (x, x) . Ovviamente O avrà coordinate $(0, 0)$ ed U avrà coordinate $(1, 1)$. Se invece (cfr. fig. 3) $P \in v$ e le coordinate dei punti di intersezione di v con le rette passanti per P e parallele agli assi y ed x sono (a, a) e (b, b) rispettivamente, allora *assegniamo a P le coordinate* (a, b) . Per quanto detto i punti V e W hanno rispettivamente coordinate $(1, 0)$ e $(0, 1)$.

Presi due elementi $a, b \in \mathcal{K}$ definiamo come *somma* di a e b (fig. 4), e la indicheremo con $a + b$, l'ordinata del punto di intersezione della retta passante per $(0, b)$ e parallela a v con la retta passante per (a, a) e parallela all'asse y .

Presi due elementi $a, b \in \mathcal{K} - \{0\}$ definiamo come *prodotto* di a e b (fig. 5), e lo indicheremo con $a \cdot b$ (o più semplicemente con ab), l'ordinata del punto di intersezione della retta passante per l'origine O e per il punto $(1, a)$ con la retta passante per (b, b) e parallela all'asse y . A completamento della precedente definizione poniamo $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ per ogni $a \in \mathcal{K}$.

Riguardo alla coordinatizzazione dei piani affini valgono le seguenti due proposizioni.

Teorema 1 (cfr. ad es. Segre 1961, p. 167). – Se π è un piano affine desarguesiano la terna $(\mathcal{K}, +, \cdot)$ è un corpo, che ha 0 ed 1 rispettivamente come elementi neutri della somma e del prodotto, e questo corpo, che è unico a meno di isomorfismi, è commutativo se π è pappiano.

Teorema 2 (cfr. ad es. Segre 1961, p. 200). – Un piano staudtiano π risulta pappiano ed il campo \mathcal{K} ad esso associato è privo di automorfismi non identici. Viceversa se un piano affine è coordinatizzabile sopra un campo \mathcal{K} privo di automorfismi non identici, esso è staudtiano.

Il piano ordinario (in cui \mathbf{K} coincide con il campo dei reali) è staudtiano mentre il piano complesso non lo è. Invece il piano costruito a partire dal campo $GF(p^k)$ di caratteristica p , con p primo, è staudtiano se e solo se $k = 1$.

La caratteristica del corpo \mathbf{K} associato a π è detta *caratteristica del piano*. La caratteristica di π è due se e solo se la bisettrice principale coincide con quella secondaria. In un piano affine π pappiano si ha che per quanto riguarda punti e rette valgono le usuali condizioni e risultati di geometria analitica. In particolare:

1.1) Tre punti distinti $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), P_3(x_3, y_3)$, sono *allineati* se e solo se

$$(x_3 - x_1)(y_2 - y_1) - (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) = 0.$$

1.2) Una retta r può essere rappresentata mediante una *equazione* del tipo $ax + by + c = 0$ con $a, b, c \in \mathbf{K}$ e con a e b non contemporaneamente nulli. ⁽⁶⁾

Invece per quanto riguarda la rappresentazione delle affinità c'è qualche differenza:

1.3) Le *equazioni di una affinità* σ tra piani affini pappiani sono

$$\begin{cases} x' = a\vartheta(x) + b\vartheta(y) + p \\ y' = c\vartheta(x) + d\vartheta(y) + q \end{cases} \quad (\text{con } \Delta = ad - bc \neq 0)$$

ove $a, b, c, d, p, q \in \mathbf{K}$ e ϑ è un automorfismo di \mathbf{K} .

Riassumendo quanto detto in questo paragrafo si ha che in un piano pappiano π (qualunque sia la sua caratteristica):

- *la condizione di allineamento e la rappresentazione delle rette coincidono con quella del piano ordinario;*
- *la rappresentazione delle affinità coincide con quelle del piano ordinario se e solo se π è staudtiano.*

Nei prossimi paragrafi mostremo come nei piani affini pappiani, postulando l'esistenza di un "triangolo rettangolo isoscele" e senza l'ausilio di altri assiomi, sia possibile definire e caratterizzare analiticamente le nozioni di ortogonalità, congruenza, similitudine ed isometria. ⁽⁷⁾ ⁽⁸⁾

Definizione. – Chiamiamo piano affine marcato una terna $\pi^* = (\mathcal{P}, \mathcal{R}, \mathcal{T})$ tale che $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ è un piano affine pappiano e $\mathcal{T} = (O, V, W)$ è una terna fissata di punti non allineati di π^* .

Nel seguito, come sistema di riferimento di un piano marcato π^* considereremo sempre il sistema di riferimento ottenuto a partire dalla terna \mathcal{T} .

⁶ Gli assi x ed y hanno rispettivamente equazione $y = 0$ e $x = 0$. Le bisettrici principali e secondaria hanno rispettivamente equazione $y = x$ ed $y = -x$.

⁷ Questa idea non sorprende se si considera che la *restituzione prospettica* consente di realizzare rilievi territoriali o architettonici a partire (perfino) da una fotografia o da una prospettiva in cui è presente la rappresentazione di un quadrato: si veda ad esempio la ricostruzione dell'ambiente raffigurato in un celebre dipinto rinascimentale, effettuata da R. Wittkower e B.A.R. Carter (1953, *The perspective of Piero della Francesca's Flagellation*, *J. Warburg & Courtauld Inst.*, XVI, pp. 292-302).

⁸ In effetti per definire l'ortogonalità delle rette basterebbe postulare l'esistenza di due coppie di rette mutuamente ortogonali.

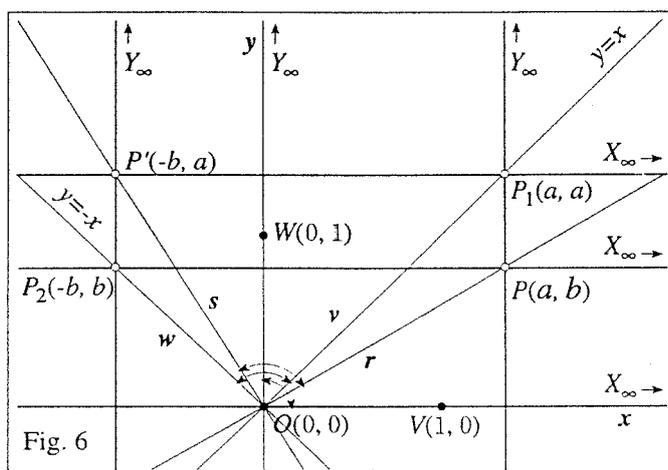
2. - ORTOGONALITÀ E SIMILITUDINI

Per introdurre in un piano marcato π^* la relazione di ortogonalità, “ \perp ”, tra le rette cominciamo con introdurla fra le rette del fascio Φ_O di centro O :

Definizione (cfr. fig. 6). – Siano r, s due rette del fascio Φ_O , diciamo che r è *ortogonale ad s* e scriveremo $r \perp s$, se preso un punto P di r distinto da O ed indicati con:

- P_1 il punto di intersezione di v con la retta per P parallela all’asse y ;
- P_2 il punto di intersezione di w con la retta per P parallela all’asse x ;
- P^\perp il punto d’intersezione della parallela ad x passante per P_1 con la parallela ad y passante per P_2 ;

si ha che $P^\perp \in s$. ⁽⁹⁾ ⁽¹⁰⁾



Dalla precedente definizione, considerata la reversibilità della costruzione che porta da P a P^\perp , segue che l’ortogonalità è una involuzione tra le rette di Φ_O e ciò comporta che per ogni retta r passante per O esiste in Φ_O una ed una sola retta s tale che $s \perp r$ ed $r \perp s$.

Dal momento che il punto $P(b, -a)$ sta sulla retta $r: ax + by = 0$ e che P^\perp risulta avere coordinate (a, b) , si ha che:

2.1) Due rette $r_1: a_1x + b_1y = 0$ ed $r_2: a_2x + b_2y = 0$, passanti per l’origine, sono *ortogonali* se e solo se $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$ ⁽¹¹⁾.

Analogamente due rette $r_1: y = m_1x$ ed $r_2: y = m_2x$ sono *ortogonali* se e solo se $m_1m_2 = -1$.

Si dice che una retta è *isotropa* se essa è ortogonale a sé stessa.

Da quanto detto se π^* ha caratteristica due allora ha come unica retta isotropa la bisettrice principale (che, in questo caso coincide con quella secondaria). Considerato che nel piano ordinario non vi sono rette isotrope e che, invece, nel piano complesso ce ne sono due è lecito chiedersi:

⁹ Questa definizione, che è suggerita dal teorema del quadrilatero completo di Desargues (cfr. ad es. Enriques 1920^v, pp. 152-154), è ben posta: basta utilizzare l’assioma D per verificare che la retta s non dipende dalla scelta del punto P .

¹⁰ Facciamo notare che se $v = w$, e solo in questo caso, la costruzione di P^\perp coincide con la costruzione che, nel piano ordinario, consente di costruire il simmetrico di un punto rispetto a v .

¹¹ Gli assi coordinati x e y risultano ortogonali, come pure le bisettrici v e w (anche se $v = w$).

- quando accade che π^* ha delle rette isotrope?
- quante possono essere le rette isotrope di π^* ?

Dalla condizione di ortogonalità tra rette non parallele all'asse y (cfr. 2.1) ⁽¹²⁾ si ha che in π^* esistono rette isotrope se e solo se esiste un $m \in \mathbb{K}$ tale che $m^2 = -1$. ⁽¹³⁾

Di conseguenza π^* ha al più due rette isotrope. Questo risultato è in accordo con il fatto che nel piano ordinario reale (o complesso) una involuzione tra gli elementi di una forma di prima specie può avere al più due elementi uniti (cfr. ad es. Enriques 1920^{iv}, pp. 148).

Estendiamo ora l'ortogonalità a tutte le rette di π^* :

Definizione. – Diciamo che due rette r ed s di π^* sono *ortogonali* se e solo se lo sono le loro parallele passanti per O .

In un piano marcato π^* , come nel piano ordinario, risulta che:

2.2) Due rette $r_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ed $r_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$ sono ortogonali se e solo se $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$.

Definizione. – Una affinità σ di π^* è una *similitudine* se manda rette ortogonali in rette ortogonali ossia se qualunque siano le rette r, s di π^* si ha che $r \perp s$ implica $\sigma(r) \perp \sigma(s)$.

Dalla (1.3) e dalla condizione (2.2) di ortogonalità delle rette segue che:

2.3) Condizione necessaria e sufficiente affinché una affinità σ di π^* in sé sia una similitudine è che

$$\begin{cases} ab + cd = 0 \\ a^2 + c^2 = b^2 + d^2 \end{cases} \quad (14)$$

che, nel caso in cui la caratteristica di π^* sia due, è equivalente a

$$\begin{cases} a = d \\ b = c \end{cases}$$

Riassumendo quanto detto in questo paragrafo si ha che in un piano marcato π^* (qualunque sia la sua caratteristica):

- la condizione di ortogonalità delle rette coincide con quella del piano ordinario; ⁽¹⁵⁾
- la rappresentazione delle similitudini di π^* coincide con quelle del piano ordinario se e solo se π^* è staudtiano. ⁽¹⁶⁾

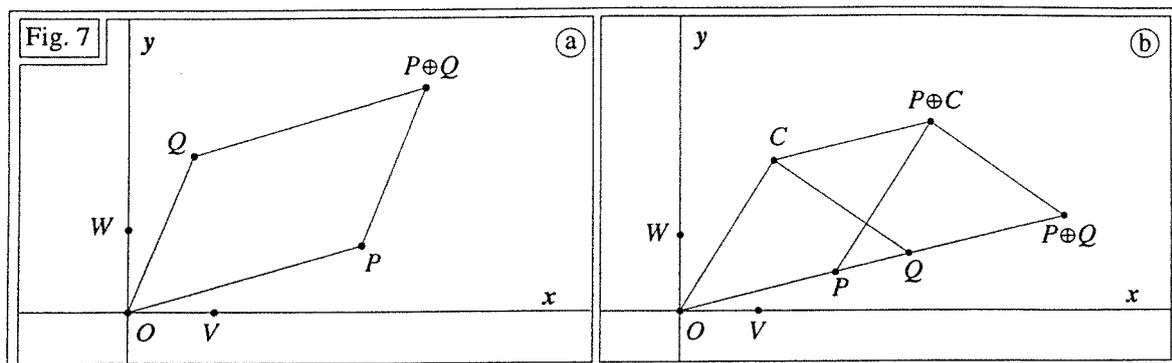
¹² Essendo gli assi x e y distinti ed ortogonali tra loro le eventuali rette isotrope sono diverse da y .

¹³ Nei campi finiti $GF(p^k)$, $p \neq 2$, esiste un m tale che $m^2 = -1$ se e solo se $p^k \equiv 1 \pmod{4}$ e quindi nel piano affine costruito a partire da $GF(p^k)$ ci sono due rette isotrope se $p^k \equiv 1 \pmod{4}$, ce n'è una se $p = 2$ e non ce ne sono se $p \neq 2$ e $p^k \not\equiv 1 \pmod{4}$.

¹⁴ La parte sufficiente si ottiene a partire dal fatto che $x \perp y$ e $v \perp w$.

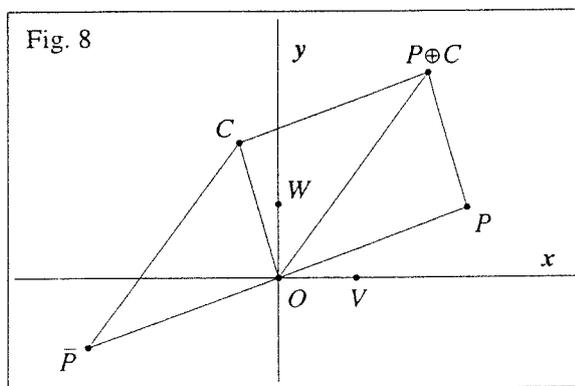
¹⁵ È una conseguenza della (2.2).

¹⁶ È una conseguenza della (2.3) e dalla proposizione 1.2.



3. - CONGRUENZA ED ISOMETRIE

Al fine di semplificare il seguito di questa esposizione diamo le definizioni di “segmento”, di “parallelogramma” e, a partire da O (primo elemento della terna \mathcal{T}) introduciamo una struttura di gruppo definendo nell'insieme dei punti di π^* (mediante le regole del parallelogramma e del doppio parallelogramma) una operazione, “ \oplus ”, di addizione.



Qualunque siano i punti A e B di π^* chiamiamo *segmento*, di *primo estremo* A e *secondo estremo* B , la coppia (A, B) che, per comodità, indicheremo con $[A, B]$.

Qualunque siano i punti A, B, C, D , di π^* , a tre a tre non allineati e quindi distinti, diciamo che la quaterna (A, B, C, D) è un *parallelogramma*, e lo indicheremo con $[A, B, C, D]$, se $AB \parallel CD$ e $BC \parallel AD$. ⁽¹⁷⁾

Presi due punti P e Q di π^* distinti da O , definiamo come *somma* di P e Q , che indicheremo con $P \oplus Q$, il punto X se:

- O, P, Q , non sono allineati e la quaterna (P, O, Q, X) è un parallelogramma (fig. 7a);
- O, P, Q , sono allineati, C è un punto non appartenente alla retta $OP (= OQ)$ e la quaterna $(P \oplus C, C, Q, X)$ è un parallelogramma (fig. 7b). ⁽¹⁸⁾

A completamento della precedente definizione poniamo, qualunque sia il punto P di π^* , $O \oplus P = P \oplus O = P$ (da quanto detto segue che O è elemento neutro per l'operazione “ \oplus ”).

L'insieme dei punti di π^* è un gruppo abeliano rispetto all'operazione \oplus : l'opposto \bar{P} di P è il punto X di π^* tale che preso un punto C non appartenente alla retta OP si ha che $(O, P \oplus C, C, X)$ è un parallelogramma (fig. 8). ⁽¹⁹⁾

¹⁷ Qualunque siano i punti A, B, C, D , se (A, B, C, D) è un parallelogramma, allora lo sono anche (B, C, D, A) , (A, D, C, B) , ecc. Inoltre se A, B, C , sono tre punti non allineati di π^* , esiste esattamente un punto X di π^* tale che (A, B, C, X) è un parallelogramma.

¹⁸ Dall'assioma D segue che questa definizione è ben posta perché indipendente dalla scelta di C .

¹⁹ Dall'assioma D segue che anche questa definizione è ben posta perché indipendente dalla scelta di C .

Analogamente a quanto fatto per l'ortogonalità fra rette daremo la definizione della relazione, "≡", di congruenza tra segmenti in due tempi. Per cominciare diamo la definizione di congruenza fra segmenti aventi il primo estremo in O .

Definizione. – Siano P_1 e P_2 due punti di π^* (non necessariamente distinti) diciamo che i segmenti $[O, P_1]$ e $[O, P_2]$ sono *congruenti*, e scriveremo $[O, P_1] \equiv [O, P_2]$, se è soddisfatta una delle seguenti condizioni:

$$\begin{aligned} P_1 &= P_2; \\ P_1 &= \bar{P}_2; \\ O(P_1 \oplus P_2) &\perp O(P_1 \oplus \bar{P}_2). \end{aligned}$$

Dalla precedente definizione segue che in π^* :

3.1) Qualunque siano i punti $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ si ha che

$$[O, P_1] \equiv [O, P_2] \text{ se e solo se } x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2. \quad (20)$$

Estendiamo ora la relazione di congruenza a tutti i segmenti di π^* .

Definizione. – Qualunque siano i punti P_1, P_2, P_3, P_4 , diciamo che

$$[P_1, P_2] \equiv [P_3, P_4] \text{ se e solo se } [O, P_2 \oplus \bar{P}_1] \equiv [O, P_4 \oplus \bar{P}_3].$$

Dalla definizione posta e dalla (4.1) in π^* , come nel piano ordinario, risulta che:

3.2) Qualunque siano i punti $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), P_3(x_3, y_3), P_4(x_4, y_4)$

$[P_1, P_2] \equiv [P_3, P_4]$ se e solo se $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = (x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2$,
che, nel caso in cui la caratteristica di π^* sia due, è equivalente a

$$[P_1, P_2] \equiv [P_3, P_4] \text{ se e solo se } x_1 + x_2 + y_1 + y_2 = x_3 + x_4 + y_3 + y_4.$$

3.3) La congruenza fra i segmenti è una relazione di equivalenza.

Definizione. – Una affinità σ di π^* è una *isometria* se qualunque siano i punti P, Q di π^* si ha che $[\sigma(P), \sigma(Q)] \equiv [P, Q]$.

Dalla condizione di congruenza (4.2) dei segmenti segue che:

3.4) Condizione necessaria affinché una affinità σ di π^* in sé di equazioni (1.3) sia una isometria è che

$$\begin{cases} 2(ab+cd)=0 \\ a^2+c^2=1 \\ b^2+d^2=1 \\ \vartheta(x^2)=x^2 \end{cases} \quad (21) \quad (22) \quad (23).$$

²⁰ Se la caratteristica di π^* è due la condizione diviene $[P_1, P_2] \equiv [P_3, P_4]$ se e solo se $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$.

²¹ La parte sufficiente segue dal fatto che $[\sigma(V), \sigma(W)] \equiv [V, W]$, $[\sigma(O), \sigma(V)] \equiv [O, V]$, $[\sigma(O), \sigma(W)] \equiv [O, W]$ e che per ogni $x \in \mathbf{K}$ $[\sigma(O), \sigma(P)] \equiv [O, P]$.

²² La quarta equazione è equivalente a $\vartheta = id_{\mathbf{K}}$: se $\gamma \neq 2$ ciò è una conseguenza della eguaglianza $(\vartheta(x+1))^2 = (x+1)^2$ altrimenti è conseguenza del fatto che $x = -x$.

²³ Se $\gamma = 2$ la prima equazione è una identità, mentre la seconda e la terza si riducono a $a + c = 1, b + d = 1$.

È facile verificare che vale anche il viceversa di (3.4) e quindi:

3.5) Condizione necessaria e sufficiente affinché una affinità σ di π^* in sé di equazioni (1.3) sia una isometria è che

$$\begin{cases} ab+cd=0 \\ a^2+c^2=1 \\ b^2+d^2=1 \\ \vartheta = id_{\mathbf{K}} \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} a+c=1 \\ b+d=1 \\ \vartheta = id_{\mathbf{K}} \end{cases}$$

a seconda che la caratteristica γ di π^* sia diversa o uguale a due.

Riassumendo quanto detto in questo paragrafo si ha che:

- in un piano marcato π^* la condizione di congruenza dei segmenti coincide con quella del piano ordinario; ⁽²⁴⁾
- la rappresentazione delle isometrie di π^* coincide con quelle del piano ordinario;
- in un piano marcato π^* le isometrie sono similitudini se la sua caratteristica è diversa da 2 oppure $\mathbf{K} = GF(2)$; ⁽²⁵⁾
- in un piano marcato π^* di caratteristica $\gamma = 2$ e $\mathbf{K} \neq GF(2)$, a differenza di quanto avviene nel piano ordinario, esistono isometrie che non sono similitudini. ⁽²⁶⁾

4. – CONCLUSIONI

Il presente studio ci ha permesso di evidenziare analogie e differenze tra il piano ordinario ed un piano marcato π^* . In particolare dalle analogie è emerso che *i piani formalmente euclidei sono tutti e soli i piani staudtiani* mentre dalle differenze è emerso che *nei piani di caratteristica due non staudtiani, e che quindi hanno più di quattro punti, avviene che esistono isometrie che non sono similitudini.*

Concludendo rileviamo che, a differenza di quanto appare da altre trattazioni, i piani veramente “esotici” non sono i piani finiti e nemmeno quelli che, come il piano complesso, hanno due rette isotrope ma quelli, finiti o no, che hanno una sola retta isotropa ed hanno più di quattro punti.

²⁴ È una conseguenza della (3.2).

²⁵ È una conseguenza della (3.5) e del teorema 1.1: se $\gamma \neq 2$ è immediato; se $\gamma = 2$ e $\mathbf{K} = GF(2)$ basta osservare che in tal caso, e solo in esso, $ad-bc \neq 0$ è equivalente a $ad+bc = 1$ che combinato con le (3.5) comporta che $ab+cd = 0$.

²⁶ Ad esempio fissato in \mathbf{K} un elemento ε diverso da 0 ed 1, basta osservare che l'applicazione di π^* in sé di equazioni

$$\begin{cases} x' = (1 + \varepsilon)x + y \\ y' = \varepsilon x \end{cases}$$

è una isometria ma non una similitudine.

5. – POSTILLA

Siamo consci di alcuni limiti e di vari rilievi che si possono addebitare a questo modo di generalizzare le nozioni di ortogonalità e di congruenza. Noi tuttavia pensiamo che l'argomento possa ancora essere approfondito e sviluppato in modo proficuo sino ad estendere le nozioni di ortogonalità e congruenza allo spazio a tre, o più dimensioni, ed a stabilire le condizioni che assicurano il *trasporto dei segmenti*, l'*orientamento delle figure* (27),... Invece da qualche tempo è come se fosse assodato che questi argomenti debbano essere affrontati seguendo l'impostazione algebrica. Per questo saremo molto lieti se questo scritto servirà a rinnovare l'interesse per i fondamenti della Geometria e ad avviare un sereno e ponderato confronto tra i vecchi ed i nuovi modi di impostare l'insegnamento della Geometria: in questa maniera si infonderebbe nuova linfa a questa antica disciplina e si realizzerebbe quello che non è solo un nostro auspicio (sogno?).

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- BRUCK R.H., 1955, Recent advances in the foundations of euclidean plane geometry, *Amer. Math. Montly*, vol. 62, n. 7 (suppl. al), pp. 2-17
- ENRIQUES F., 1898, *Lezioni di Geometria Proiettiva*, Zanichelli, Bologna, pp. IX+379 (1920^{IV}, X+464)
- FIORI C., PELLEGRINO C., 1995, Teoremi configurazionali e coordinatizzazione di piani affini, *La Matematica e la sua Didattica*, n. 4, pp. 431-445
- FIORI C., PELLEGRINO C., 1996, Alla ricerca delle Affinità perdute, *La Matematica e la sua Didattica*, n. 1, pp. 46-56
- HALL M., 1943, Projective planes, *Trans. Amer. Math. Soc.*, Pol. 54, Bologna, pp. 229-277
- HILBERT D., 1899, *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig/Berlin (trad. ital. 1970^X, *Fondamenti di Geometria*, Feltrinelli, Milano, pp. 274)
- KARZEL H., MARCHI M., 1997, L'orientamento nel piano: una difficile razionalizzazione, in D'AMORE B. e PELLEGRINO C., *Convegno per i sessantacinque anni di Francesco Speranza*, Pitagora Editrice, Bologna, pp. 65-73
- NEUMANN J. (VON), 1947, The Mathematician, in HEYWOOD R.B. (ed.), *Works of the Mind*, University Chicago Press, Chicago, (ripubblicato, nel 1961, in *JHON NEUMANN - Collected Works*, vol. 1, pp. 1-9)
- SEGRE B., 1948, *Lezioni di Geometria Moderna*, Zanichelli, Bologna, vol. 1, pp. 196 (trad. inglese ampliata 1961, *Lectures on Modern Geometry*, Ed. Cremonese, Roma, pp. 480)
- SPERANZA F., 1988, Salviamo la Geometria!, *La Matematica e la sua Didattica*, n. 2, pp. 6-14 (ripubblicato, nel 1999, sulla stessa rivista, n. 1, pp. 5-16)

27 Per un interessante studio sull'orientazione del piano rinviamo a Karzel e Marchi 1997.

1. Maria Cristina Marcuzzo [1985] "Yoan Violet Robinson (1903-1983)", pp. 134
2. Sergio Lugaesi [1986] "Le imposte nelle teorie del sovrappiù", pp. 26
3. Massimo D'Angelillo e Leonardo Paggi [1986] "PCI e socialdemocrazie europee. Quale riformismo?", pp. 158
4. Gian Paolo Caselli e Gabriele Pastrello [1986] "Un suggerimento hobsontiano su terziario ed occupazione: il caso degli Stati Uniti 1960/1983", pp. 52
5. Paolo Bosi e Paolo Silvestri [1986] "La distribuzione per aree disciplinari dei fondi destinati ai Dipartimenti, Istituti e Centri dell'Università di Modena: una proposta di riforma", pp. 25
6. Marco Lippi [1986] "Aggregations and Dynamic in One-Equation Econometric Models", pp. 64
7. Paolo Silvestri [1986] "Le tasse scolastiche e universitarie nella Legge Finanziaria 1986", pp. 41
8. Mario Forni [1986] "Storie familiari e storie di proprietà. Itinerari sociali nell'agricoltura italiana del dopoguerra", pp. 165
9. Sergio Paba [1986] "Gruppi strategici e concentrazione nell'industria europea degli elettrodomestici bianchi", pp. 56
10. Nerio Naldi [1986] "L'efficienza marginale del capitale nel breve periodo", pp. 54
11. Fernando Vianello [1986] "Labour Theory of Value", pp. 31
12. Piero Ganugi [1986] "Risparmio forzato e politica monetaria negli economisti italiani tra le due guerre", pp. 40
13. Maria Cristina Marcuzzo e Annalisa Rosselli [1986] "The Theory of the Gold Standard and Ricardo's Standard Comodity", pp. 30
14. Giovanni Solinas [1986] "Mercati del lavoro locali e carriere di lavoro giovanili", pp. 66
15. Giovanni Bonifati [1986] "Saggio dell'interesse e domanda effettiva. Osservazioni sul cap. 17 della General Theory", pp. 42
16. Marina Murat [1986] "Betwin old and new classical macroeconomics: notes on Lejonhufvud's notion of full information equilibrium", pp. 20
17. Sebastiano Brusco e Giovanni Solinas [1986] "Mobilità occupazionale e disoccupazione in Emilia Romagna", pp. 48
18. Mario Forni [1986] "Aggregazione ed esogeneità", pp. 13
19. Sergio Lugaesi [1987] "Redistribuzione del reddito, consumi e occupazione", pp. 17
20. Fiorenzo Sperotto [1987] "L'immagine neopopulista di mercato debole nel primo dibattito sovietico sulla pianificazione", pp. 34
21. M. Cecilia Guerra [1987] "Benefici tributari nel regime misto per i dividendi proposto dalla commissione Sarcinelli: una nota critica", pp. 9
22. Leonardo Paggi [1987] "Contemporary Europe and Modern America: Theories of Modernity in Comparative Perspective", pp. 38
23. Fernando Vianello [1987] "A Critique of Professor Goodwin's 'Critique of Sraffa'", pp. 12
24. Fernando Vianello [1987] "Effective Demand and the Rate of Profits. Some Thoughts on Marx, Kalecki and Sraffa", pp. 41
25. Anna Maria Sala [1987] "Banche e territorio. Approccio ad un tema geografico-economico", pp. 40
26. Enzo Mingione e Giovanni Mottura [1987] "Fattori di trasformazione e nuovi profili sociali nell'agricoltura italiana: qualche elemento di discussione", pp. 36
27. Giovanna Procacci [1988] "The State and Social Control in Italy During the First World War", pp. 18
28. Massimo Matteuzzi e Annamaria Simonazzi [1988] "Il debito pubblico", pp. 62
29. Maria Cristina Marcuzzo (a cura di) [1988] "Richard F. Kahn. A discipline of Keynes", pp. 118
30. Paolo Bosi [1988] "MICROMOD. Un modello dell'economia italiana per la didattica della politica fiscale", pp. 34
31. Paolo Bosi [1988] "Indicatori della politica fiscale. Una rassegna e un confronto con l'aiuto di MICROMOD", pp. 25
32. Giovanna Procacci [1988] "Protesta popolare e agitazioni operaie in Italia 1915-1918", pp. 45
33. Margherita Russo [1988] "Distretto Industriale e servizi. Uno studio dei trasporti nella produzione e nella vendita delle piastrelle", pp. 157
34. Margherita Russo [1988] "The effect of technical change on skill requirements: an empirical analysis", pp. 28
35. Carlo Grillenzoni [1988] "Identification, estimations of multivariate transfer functions", pp. 33
36. Nerio Naldi [1988] "'Keynes' concept of capital", pp. 40
37. Andrea Ginzburg [1988] "locomotiva Italia?", pp. 30
38. Giovanni Mottura [1988] "La 'persistenza' secolare. Appunti su agricoltura contadina ed agricoltura familiare nelle società industriali", pp. 40
39. Giovanni Mottura [1988] "L'anticamera dell'esodo. I contadini italiani della 'restaurazione contrattuale' fascista alla riforma fondiaria", pp. 40
40. Leonardo Paggi [1988] "Americanismo e riformismo. La socialdemocrazia europea nell'economia mondiale aperta", pp. 120
41. Annamaria Simonazzi [1988] "Fenomeni di isteresi nella spiegazione degli alti tassi di interesse reale", pp. 44
42. Antonietta Bassetti [1989] "Analisi dell'andamento e della casualità della borsa valori", pp. 12
43. Giovanna Procacci [1989] "State coercion and worker solidarity in Italy (1915-1918): the moral and political content of social unrest", pp. 41
44. Carlo Alberto Magni [1989] "Reputazione e credibilità di una minaccia in un gioco bargaining", pp. 56
45. Giovanni Mottura [1989] "Agricoltura familiare e sistema agroalimentare in Italia", pp. 84
46. Mario Forni [1989] "Trend, Cycle and 'Fortuitous cancellation': a Note on a Paper by Nelson and Plosser", pp. 4
47. Paolo Bosi, Roberto Golinelli, Anna Stagni [1989] "Le origini del debito pubblico e il costo della stabilizzazione", pp. 26
48. Roberto Golinelli [1989] "Note sulla struttura e sull'impiego dei modelli macroeconomici", pp. 21
49. Marco Lippi [1989] "A Short Note on Cointegration and Aggregation", pp. 11
50. Gian Paolo Caselli e Gabriele Pastrello [1989] "The Linkage between Tertiary and Industrial Sector in the Italian Economy: 1951-1988. From an External Dependence to an International One", pp. 40
51. Gabriele Pastrello [1989] "Francois quesnay: dal Tableau Zig-zag al Tableau Formule: una ricostruzione", pp. 48
52. Paolo Silvestri [1989] "Il bilancio dello stato", pp. 34
53. Tim Mason [1990] "Tre seminari di storia sociale contemporanea", pp. 26
54. Michele Lalla [1990] "The Aggregate Escape Rate Analysed through the Queueing Model", pp. 23
55. Paolo Silvestri [1990] "Sull'autonomia finanziaria dell'università", pp. 11
56. Paola Bertolini, Enrico Giovannetti [1990] "Uno studio di 'filiera' nell'agroindustria. Il caso del Parmigiano Reggiano", pp. 164

57. Paolo Bosi, Roberto Golinelli, Anna Stagni [1990] "Effetti macroeconomici, settoriali e distributivi dell'armonizzazione dell'IVA", pp. 24
58. Michele Lalla [1990] "Modelling Employment Spells from Emilia Labour Force Data", pp. 18
59. Andrea Ginzburg [1990] "Politica Nazionale e commercio internazionale", pp. 22
60. Andrea Giommi [1990] "La probabilità individuale di risposta nel trattamento dei dati mancanti", pp. 13
61. Gian Paolo Caselli e Gabriele Pastrello [1990] "The service sector in planned economies. Past experiences and future prospectives", pp. 32
62. Giovanni Solinas [1990] "Competenze, grandi industrie e distretti industriali, Il caso Magneti Marelli", pp. 23
63. Andrea Ginzburg [1990] "Debito pubblico, teorie monetarie e tradizione civica nell'Inghilterra del Settecento", pp. 30
64. Mario Forni [1990] "Incertezza, informazione e mercati assicurativi: una rassegna", pp. 37
65. Mario Forni [1990] "Misspecification in Dynamic Models", pp. 19
66. Gian Paolo Caselli e Gabriele Pastrello [1990] "Service Sector Growth in CPE's: An Unsolved Dilemma", pp. 28
67. Paola Bertolini [1990] "La situazione agro-alimentare nei paesi ad economia avanzata", pp. 20
68. Paola Bertolini [1990] "Sistema agro-alimentare in Emilia Romagna ed occupazione", pp. 65
69. Enrico Giovannetti [1990] "Efficienza ed innovazione: il modello "fondi e flussi" applicato ad una filiera agro-industriale", pp. 38
70. Margherita Russo [1990] "Cambiamento tecnico e distretto industriale: una verifica empirica", pp. 115
71. Margherita Russo [1990] "Distretti industriali in teoria e in pratica: una raccolta di saggi", pp. 119
72. Paolo Silvestri [1990] "La Legge Finanziaria. Voce dell'enciclopedia Europea Garzanti", pp. 8
73. Rita Paltrinieri [1990] "La popolazione italiana: problemi di oggi e di domani", pp. 57
74. Enrico Giovannetti [1990] "Illusioni ottiche negli andamenti delle Grandezze distributive: la scala mobile e l'appiattimento delle retribuzioni in una ricerca", pp. 120
75. Enrico Giovannetti [1990] "Crisi e mercato del lavoro in un distretto industriale: il bacino delle ceramiche. Sez. I", pp. 150
76. Enrico Giovannetti [1990] "Crisi e mercato del lavoro in un distretto industriale: il bacino delle ceramiche. Sez. II", pp. 145
78. Antonietta Bassetti e Costanza Torricelli [1990] "Una riqualificazione dell'approccio bargaining alla selezioni di portafoglio", pp. 4
77. Antonietta Bassetti e Costanza Torricelli [1990] "Il portafoglio ottimo come soluzione di un gioco bargaining", pp. 15
79. Mario Forni [1990] "Una nota sull'errore di aggregazione", pp. 6
80. Francesca Bergamini [1991] "Alcune considerazioni sulle soluzioni di un gioco bargaining", pp. 21
81. Michele Grillo e Michele Polo [1991] "Political Exchange and the allocation of surplus: a Model of Two-party competition", pp. 34
82. Gian Paolo Caselli e Gabriele Pastrello [1991] "The 1990 Polish Recession: a Case of Truncated Multiplier Process", pp. 26
83. Gian Paolo Caselli e Gabriele Pastrello [1991] "Polish firms: Pricate Vices Pubblis Virtues", pp. 20
84. Sebastiano Brusco e Sergio Paba [1991] "Connessioni, competenze e capacità concorrenziale nell'industria della Sardegna", pp. 25
85. Claudio Grimaldi, Rony Hamoui, Nicola Rossi [1991] "Non Marketable assets and households' Portfolio Choice: a Case of Study of Italy", pp. 38
86. Giulio Righi, Massimo Baldini, Alessandra Brambilla [1991] "Le misure degli effetti redistributivi delle imposte indirette: confronto tra modelli alternativi", pp. 47
87. Roberto Fanfani, Luca Lanini [1991] "Innovazione e servizi nello sviluppo della meccanizzazione agricola in Italia", pp. 35
88. Antonella Caiumi e Roberto Golinelli [1992] "Stima e applicazioni di un sistema di domanda Almost Ideal per l'economia italiana", pp. 34
89. Maria Cristina Marcuzzo [1992] "La relazione salari-occupazione tra rigidità reali e rigidità nominali", pp. 30
90. Mario Biagioli [1992] "Employee financial participation in enterprise results in Italy", pp. 50
91. Mario Biagioli [1992] "Wage structure, relative prices and international competitiveness", pp. 50
92. Paolo Silvestri e Giovanni Solinas [1993] "Abbandoni, esiti e carriera scolastica. Uno studio sugli studenti iscritti alla Facoltà di Economia e Commercio dell'Università di Modena nell'anno accademico 1990/1991", pp. 30
93. Gian Paolo Caselli e Luca Martinelli [1993] "Italian GPN growth 1890-1992: a unit root or segmented trend representatin?", pp. 30
94. Angela Politi [1993] "La rivoluzione fraintesa. I partigiani emiliani tra liberazione e guerra fredda, 1945-1955", pp. 55
95. Alberto Rinaldi [1993] "Lo sviluppo dell'industria metalmeccanica in provincia di Modena: 1945-1990", pp. 70
96. Paolo Emilio Mistrulli [1993] "Debito pubblico, intermediari finanziari e tassi d'interesse: il caso italiano", pp. 30
97. Barbara Pistoresi [1993] "Modelling disaggregate and aggregate labour demand equations. Cointegration analysis of a labour demand function for the Main Sectors of the Italian Economy: 1950-1990", pp. 45
98. Giovanni Bonifati [1993] "Progresso tecnico e accumulazione di conoscenza nella teoria neoclassica della crescita endogena. Una analisi critica del modello di Romer", pp. 50
99. Marcello D'Amato e Barbara Pistoresi [1994] "The relationship(s) among Wages, Prices, Unemployment and Productivity in Italy", pp. 30
100. Mario Forni [1994] "Consumption Volatility and Income Persistence in the Permanent Income Model", pp. 30
101. Barbara Pistoresi [1994] "Using a VECM to characterise the relative importance of permanent and transitory components", pp. 28
102. Gian Paolo Caselli and Gabriele Pastrello [1994] "Polish recovery form the slump to an old dilemma", pp. 20
103. Sergio Paba [1994] "Imprese visibili, accesso al mercato e organizzazione della produzione", pp. 20
104. Giovanni Bonifati [1994] "Progresso tecnico, investimenti e capacità produttiva", pp. 30
105. Giuseppe Marotta [1994] "Credit view and trade credit: evidence from Italy", pp. 20
106. Margherita Russo [1994] "Unit of investigation for local economic development policies", pp. 25
107. Luigi Brighi [1995] "Monotonicity and the demand theory of the weak axioms", pp. 20
108. Mario Forni e Lucrezia Reichlin [1995] "Modelling the impact of technological change across sectors and over time in manufacturing", pp. 25
109. Marcello D'Amato and Barbara Pistoresi [1995] "Modelling wage growth dynamics in Italy: 1960-1990", pp. 38
110. Massimo Baldini [1995] "INDIMOD. Un modello di microsimulazione per lo studio delle imposte indirette", pp. 37

111. Paolo Bosi [1995] "Regionalismo fiscale e autonomia tributaria: l'emersione di un modello di consenso", pp. 38
112. Massimo Baldini [1995] "Aggregation Factors and Aggregation Bias in Consumer Demand", pp. 33
113. Costanza Torricelli [1995] "The information in the term structure of interest rates. Can stochastic models help in resolving the puzzle?" pp. 25
114. Margherita Russo [1995] "Industrial complex, pôle de développement, distretto industriale. Alcune questioni sulle unità di indagine nell'analisi dello sviluppo." pp. 45
115. Angelika Moryson [1995] "50 Jahre Deutschland. 1945 - 1995" pp. 21
116. Paolo Bosi [1995] "Un punto di vista macroeconomico sulle caratteristiche di lungo periodo del nuovo sistema pensionistico italiano." pp. 32
117. Gian Paolo Caselli e Salvatore Curatolo [1995] "Esistono relazioni stimabili fra dimensione ed efficienza delle istituzioni e crescita produttiva? Un esercizio nello spirito di D.C. North." pp. 11
118. Mario Forni e Marco Lippi [1995] "Permanent income, heterogeneity and the error correction mechanism." pp. 21
119. Barbara Pistoresi [1995] "Co-movements and convergence in international output. A Dynamic Principal Components Analysis" pp. 14
120. Mario Forni e Lucrezia Reichlin [1995] "Dynamic common factors in large cross-section" pp. 17
121. Giuseppe Marotta [1995] "Il credito commerciale in Italia: una nota su alcuni aspetti strutturali e sulle implicazioni di politica monetaria" pp. 20
122. Giovanni Bonifati [1995] "Progresso tecnico, concorrenza e decisioni di investimento: una analisi delle determinanti di lungo periodo degli investimenti" pp. 25
123. Giovanni Bonifati [1995] "Cambiamento tecnico e crescita endogena: una valutazione critica delle ipotesi del modello di Romer" pp. 21
124. Barbara Pistoresi e Marcello D'Amato [1995] "La riservatezza del banchiere centrale è un bene o un male? Effetti dell'informazione incompleta sul benessere in un modello di politica monetaria." pp. 32
125. Barbara Pistoresi [1995] "Radici unitarie e persistenza: l'analisi univariata delle fluttuazioni economiche." pp. 33
126. Barbara Pistoresi e Marcello D'Amato [1995] "Co-movements in European real outputs" pp. 20
127. Antonio Ribba [1996] "Ciclo economico, modello lineare-stocastico, forma dello spettro delle variabili macroeconomiche" pp. 31
128. Carlo Alberto Magni [1996] "Repeatable and una tantum real options a dynamic programming approach" pp. 23
129. Carlo Alberto Magni [1996] "Opzioni reali d'investimento e interazione competitiva: programmazione dinamica stocastica in optimal stopping" pp. 26
130. Carlo Alberto Magni [1996] "Vaghezza e logica fuzzy nella valutazione di un'opzione reale" pp. 20
131. Giuseppe Marotta [1996] "Does trade credit redistribution thwart monetary policy? Evidence from Italy" pp. 20
132. Mauro Dell'Amico e Marco Trubian [1996] "Almost-optimal solution of large weighted equicut problems" pp. 30
133. Carlo Alberto Magni [1996] "Un esempio di investimento industriale con interazione competitiva e avversione al rischio" pp. 20
134. Margherita Russo, Peter Börkey, Emilio Cubel, François Lévêque, Francisco Mas [1996] "Local sustainability and competitiveness: the case of the ceramic tile industry" pp. 66
135. Margherita Russo [1996] "Camionetto tecnico e relazioni tra imprese" pp. 190
136. David Avra Lane, Irene Poli, Michele Lalla, Alberto Roverato [1996] "Lezioni di probabilità e inferenza statistica" pp. 288
137. David Avra Lane, Irene Poli, Michele Lalla, Alberto Roverato [1996] "Lezioni di probabilità e inferenza statistica - Esercizi svolti -" pp. 302
138. Barbara Pistoresi [1996] "Is an Aggregate Error Correction Model Representative of Disaggregate Behaviours? An example" pp. 24
139. Luisa Malaguti e Costanza Torricelli [1996] "Monetary policy and the term structure of interest rates", pp. 30
140. Mauro Dell'Amico, Martine Labbé, Francesco Maffioli [1996] "Exact solution of the SONET Ring Loading Problem", pp. 20
141. Mauro Dell'Amico, R.J.M. Vaessens [1996] "Flow and open shop scheduling on two machines with transportation times and machine-independent processing times in NP-hard, pp. 10
142. M. Dell'Amico, F. Maffioli, A. Sciomechen [1996] "A Lagrangean Heuristic for the Pirze Collecting Travelling Salesman Problem", pp. 14
143. Massimo Baldini [1996] "Inequality Decomposition by Income Source in Italy - 1987 - 1993", pp. 20
144. Graziella Bertocchi [1996] "Trade, Wages, and the Persistence of Underdevelopment" pp. 20
145. Graziella Bertocchi and Fabio Canova [1996] "Did Colonization matter for Growth? An Empirical Exploration into the Historical Causes of Africa's Underdevelopment" pp. 32
146. Paola Bertolini [1996] "La modernization de l'agriculture italienne et le cas de l'Emilie Romagne" pp. 20
147. Enrico Giovannetti [1996] "Organisation industrielle et développement local: le cas de l'agroindustrie in Emilie Romagne" pp. 18
148. Maria Elena Bontempi e Roberto Golinelli [1996] "Le determinanti del leverage delle imprese: una applicazione empirica ai settori industriali dell'economia italiana" pp. 31
149. Paola Bertolini [1996] "L'agriculture et la politique agricole italienne face aux recents scenarios", pp. 20
150. Enrico Giovannetti [1996] "Il grado di utilizzo della capacità produttiva come misura dei costi di transazione: una rilettura di 'Nature of the Firm' di R. Coase", pp. 75
151. Enrico Giovannetti [1996] "Il I° ciclo del Diploma Universitario Economia e Amministrazione delle Imprese", pp. 25
152. Paola Bertolini, Enrico Giovannetti, Giulia Santacaterina [1996] "Il Settore del Verde Pubblico. Analisi della domanda e valutazione economica dei benefici", pp. 35
153. Giovanni Solinas [1996] "Sistemi produttivi del Centro-Nord e del Mezzogiorno. L'industria delle calzature", pp. 55
154. Tindara Addabbo [1996] "Married Women's Labour Supply in Italy in a Regional Perspective", pp. 85
155. Paolo Silvestri, Giuseppe Catalano, Cristina Bevilacqua [1996] "Le tasse universitarie e gli interventi per il diritto allo studio: la prima fase di applicazione di una nuova normativa" pp. 159
156. Sebastiano Brusco, Paolo Bertossi, Margherita Russo [1996] "L'industria dei rifiuti urbani in Italia", pp. 25
157. Paolo Silvestri, Giuseppe Catalano [1996] "Le risorse del sistema universitario italiano: finanziamento e governo" pp. 400
158. Carlo Alberto Magni [1996] "Un semplice modello di opzione di differimento e di vendita in ambito discreto", pp. 10
159. Tito Pietra, Paolo Siconolfi [1996] "Fully Revealing Equilibria in Sequential Economies with Asset Markets" pp. 17
160. Tito Pietra, Paolo Siconolfi [1996] "Extrinsic Uncertainty and the Informational Role of Prices" pp. 42
161. Paolo Bertella Farnetti [1996] "Il negro e il rosso. Un precedente non esplorato dell'integrazione afroamericana negli Stati Uniti" pp. 26
162. David Lane [1996] "Is what is good for each best for all? Learning from others in the information contagion model" pp. 18

163. Antonio Ribba [1996] "A note on the equivalence of long-run and short-run identifying restrictions in cointegrated systems" pp. 10
164. Antonio Ribba [1996] "Scomposizioni permanenti-transitorie in sistemi cointegrati con una applicazione a dati italiani" pp. 23
165. Mario Forni, Sergio Paba [1996] "Economic Growth, Social Cohesion and Crime" pp. 20
166. Mario Forni, Lucrezia Reichlin [1996] "Let's get real: a factor analytical approach to disaggregated business cycle dynamics" pp. 25
167. Marcello D'Amato e Barbara Pistoiesi [1996] "So many Italies: Statistical Evidence on Regional Cohesion" pp. 31
168. Elena Bonfiglioli, Paolo Bosi, Stefano Toso [1996] "L'equità del contributo straordinario per l'Europa" pp. 20
169. Graziella Bertocchi, Michael Spagat [1996] "Il ruolo dei licei e delle scuole tecnico-professionali tra progresso tecnologico, conflitto sociale e sviluppo economico" pp. 37
170. Gianna Boero, Costanza Torricelli [1997] "The Expectations Hypothesis of the Term Structure of Interest Rates: Evidence for Germany" pp. 15
171. Mario Forni, Lucrezia Reichlin [1997] "National Policies and Local Economies: Europe and the US" pp. 22
172. Carlo Alberto Magni [1997] "La trappola del Roe e la tridimensionalità del Van in un approccio sistemico", pp. 16
173. Mauro Dell'Amico [1997] "A Linear Time Algorithm for Scheduling Outforests with Communication Delays on Two or Three Processor" pp. 18
174. Paolo Bosi [1997] "Aumentare l'età pensionabile fa diminuire la spesa pensionistica? Ancora sulle caratteristiche di lungo periodo della riforma Dini" pp. 13
175. Paolo Bosi e Massimo Matteuzzi [1997] "Nuovi strumenti per l'assistenza sociale" pp. 31
176. Mauro Dell'Amico, Francesco Maffioli e Marco Trubian [1997] "New bounds for optimum traffic assignment in satellite communication" pp. 21
177. Carlo Alberto Magni [1997] "Paradossi, inverosimiglianze e contraddizioni del Van: operazioni certe" pp. 9
178. Barbara Pistoiesi e Marcello D'Amato [1997] "Persistence of relative unemployment rates across Italian regions" pp. 25
179. Margherita Russo, Franco Cavedoni e Riccardo Pianesani [1997] "Le spese ambientali dei Comuni in provincia di Modena, 1993-1995" pp. 23
180. Gabriele Pastrello [1997] "Time and Equilibrium, Two Elusive Guests in the Keynes-Hawtrey-Robertson Debate in the Thirties" pp. 25
181. Luisa Malaguti e Costanza Torricelli [1997] "The Interaction Between Monetary Policy and the Expectation Hypothesis of the Term Structure of Interest rates in a N-Period Rational Expectation Model" pp. 27
182. Mauro Dell'Amico [1997] "On the Continuous Relaxation of Packing Problems – Technical Note" pp. 8
183. Stefano Bordini [1997] "Prova di Idoneità di Informatica Dispensa Esercizi Excel 5" pp. 49
184. Francesca Bergamini e Stefano Bordini [1997] "Una verifica empirica di un nuovo metodo di selezione ottima di portafoglio" pp. 22
185. Gian Paolo Caselli e Maurizio Battini [1997] "Following the tracks of atkinson and micklewright the changing distribution of income and earnings in Poland from 1989 to 1995" pp. 21
186. Mauro Dell'Amico e Francesco Maffioli [1997] "Combining Linear and Non-Linear Objectives in Spanning Tree Problems" pp. 21
187. Gianni Ricci e Vanessa Debba [1997] "Una soluzione evolutiva in un gioco differenziale di lotta di classe" pp. 14
188. Fabio Canova e Eva Ortega [1997] "Testing Calibrated General Equilibrium Model" pp. 34
189. Fabio Canova [1997] "Does Detrending Matter for the Determination of the Reference Cycle and the Selection of Turning Points?" pp. 35
190. Fabio Canova e Gianni De Nicolò [1997] "The Equity Premium and the Risk Free Rate: A Cross Country, Cross Maturity Examination" pp. 41
191. Fabio Canova e Angel J. Ubide [1997] "International Business Cycles, Financial Market and Household Production" pp. 32
192. Fabio Canova e Gianni De Nicolò [1997] "Stock Returns, Term Structure, Inflation and Real Activity: An International Perspective" pp. 33
193. Fabio Canova e Morten Ravn [1997] "The Macroeconomic Effects of German Unification: Real Adjustments and the Welfare State" pp. 34
194. Fabio Canova [1997] "Detrending and Business Cycle Facts" pp. 40
195. Fabio Canova e Morten O. Ravn [1997] "Crossing the Rio Grande: Migrations, Business Cycle and the Welfare State" pp. 37
196. Fabio Canova e Jane Murrain [1997] "Sources and Propagation of International Output Cycles: Common Shocks or Transmission?" pp. 41
197. Fabio Canova e Albert Marcet [1997] "The Poor Stay Poor: Non-Convergence Across Countries and Regions" pp. 44
198. Carlo Alberto Magni [1997] "Un Criterio Strutturalista per la Valutazione di Investimenti" pp. 17
199. Stefano Bordini [1997] "Elaborazione Automatica dei Dati" pp. 60
200. Paolo Bertella Farnetti [1997] "The United States and the Origins of European Integration" pp. 19
201. Paolo Bosi [1997] "Sul Controllo Dinamico di un Sistema Pensionistico a Ripartizione di Tipo Contributivo" pp. 17
202. Paola Bertolini [1997] "European Union Agricultural Policy: Problems and Perspectives" pp. 18
203. Stefano Bordini [1997] "Supporti Informatici per la Ricerca delle soluzioni di Problemi Decisionali" pp. 30
204. Carlo Alberto Magni [1997] "Paradossi, Inverosimiglianze e Contraddizioni del Van: Operazioni Aleatorie" pp. 10
205. Carlo Alberto Magni [1997] "Tir, Roe e Van: Distorsioni linguistiche e Cognitive nella Valutazione degli investimenti" pp. 17
206. Gisella Facchinetti, Roberto Ghiselli Ricci e Silvia Muzzioli [1997] "New Methods For Ranking Triangular Fuzzy Numbers: An Investment Choice" pp. 9
207. Mauro Dell'Amico e Silvano Martello [1997] "Reduction of the Three-Partition Problem" pp. 16
208. Carlo Alberto Magni [1997] "IRR, ROE and NPV: a Systemic Approach" pp. 20
209. Mauro Dell'Amico, Andrea Lodi e Francesco Maffioli [1997] "Solution of the cumulative assignment problem with a well-structured tabu search method" pp. 25
210. Carlo Alberto Magni [1997] "La definizione di investimento e criterio del Tir ovvero: la realtà inventata" pp. 16
211. Carlo Alberto Magni [1997] "Critica alla definizione classica di investimento: un approccio sistemico" pp. 17
212. Alberto Roverato [1997] "Asymptotic prior to posterior analysis for graphical gaussian models" pp. 8
213. Tindara Addabbo [1997] "Povertà nel 1995 analisi statica e dinamica sui redditi familiari" pp. 64
214. Gian Paolo Caselli e Franca Manghi [1997] "La transizione da piano a mercato e il modello di Ising" pp. 15
215. Tindara Addabbo [1998] "Lavoro non pagato e reddito esteso: un'applicazione alle famiglie italiane in cui entrambi i coniugi sono lavoratori dipendenti" pp. 54

216. Tindara Addabbo [1998] "Probabilità di occupazione e aspettative individuali" pp 36
217. Lara Magnani [1998] "Transazioni, contratti e organizzazioni: una chiave di lettura della teoria economica dell'organizzazione" pp 39
218. Michele Lalla, Rosella Molinari e Maria Grazia Modena [1998] "La progressione delle carriere: i percorsi in cardiologia" pp 46
219. Lara Magnani [1998] "L'organizzazione delle transazioni di subfornitura nel distretto industriale" pp 40
220. Antonio Ribba [1998] "Recursive VAR orderings and identification of permanent and transitory shocks" pp12
221. Antonio Ribba [1998] "Granger-causality and exogeneity in cointegrated Var models" pp 5
222. Luigi Brighi e Marcello D'Amato [1998] "Optimal Procurement in Multiproduct Monopoly" pp 25
223. Paolo Bosi, Maria Cecilia Guerra e Paolo Silvestri [1998] "La spesa sociale nel comune Modena" Rapporto intermedio pp 37
224. Mario Forni e Marco Lippi [1998] "On the Microfoundations of Dynamic Macroeconomics" pp 22
225. Roberto Ghiselli Ricci [1998] "Nuove Proposte di Ordinamento di Numeri Fuzzy. Una Applicazione ad un Problema di Finanziamento" pp 7
226. Tommaso Minerva [1998] "Internet Domande e Risposte" pp 183
227. Tommaso Minerva [1998] "Elementi di Statistica Computazione. Parte Prima: Il Sistema Operativo Unix ed il Linguaggio C" pp. 57
228. Tommaso Minerva and Irene Poli [1998] "A Genetic Algorithms Selection Method for Predictive Neural Nets and Linear Models" pp. 60
229. Tommaso Minerva and Irene Poli [1998] "Building an ARMA Model by using a Genetic Algorithm" pp. 60
230. Mauro Dell'Amico e Paolo Toth [1998] "Algorithms and Codes for Dense Assignment Problems: the State of the Art" pp 35
231. Ennio Cavazzuti e Nicoletta Pacchiarotti [1998] "How to play an hotelling game in a square town" pp 12
232. Alberto Roverato e Irene Poli [1998] "Un algoritmo genetico per la selezione di modelli grafici" pp 11
233. Marcello D'Amato e Barbara Pistoresi [1998] "Delegation of Monetary Policy to a Central Banker with Private Information" pp 15.
234. Graziella Bertocchi e Michael Spagat [1998] "The Evolution of Modern Educational Systems. Technical vs. General Education, Distributional Conflict, and Growth" pp 31
235. André Dumas [1998] "Le systeme monetaire Europeen" pp 24.
236. Gianna Boero, Gianluca Di Lorenzo e Costanza Torricelli [1998] "The influence of short rate predictability and monetary policy on tests of the expectations hypothesis: some comparative evidence" pp 30
237. Carlo Alberto Magni [1998] "A systemic rule for investment decisions: generalizations of the traditional DCF criteria and new conceptions" pp 30
238. Marcello D'Amato e Barbara Pistoresi [1998] "Interest Rate Spreads Between Italy and Germany: 1995-1997" pp 16
239. Paola Bertolini e Alberto Bertacchini [1998] "Il distretto di lavorazioni carni suine in provincia di Modena" pp 29
240. Costanza Torricelli e Gianluca Di Lorenzo [1998] "Una nota sui fondamenti matematico-finanziari della teoria delle aspettative della struttura della scadenza" pp. 15
241. Christophe Croux, Mario Forni e Lucrezia Reichlin [1998] "A Measure of Comovement for Economic Indicators: Theory and Empirics" pp 23.
242. Carlo Alberto Magni [1998] "Note sparse sul dilemma del prigioniero (e non solo)" pp 13.
243. Gian Paolo Caselli [1998] The future of mass consumption society in the former planned economies: a macro approach pp 21.
244. Mario Forni, Marc Hallin, Marco Lippi e Lucrezia Reichlin [1998] "The generalized dynamic factor model: identification and estimation" pp 35.
245. Carlo Alberto Magni [1998] "Pictures, language and research: the case of finance and financial mathematics" pp 35.
246. Luigi Brighi [1998] "Demand and generalized monotonicity" pp 21.
247. Mario Forni e Lucrezia Reichlin [1998] "Risk and potential insurance in Europe" pp 20.
248. Tommaso Minerva, Sandra Paterlini e Irene Poli [1998] "A Genetic Algorithm for predictive Neural Network Design (GANND). A Financial Application" pp 12.
249. Gian Paolo Caselli Maurizio Battini [1998] "The Changing Distribution of Earnings in Poland from 1989 to 1996" pp. 9.
250. Mario Forni, Sergio Paba [1998] "Industrial Districts, Social Environment and Local Growth" Evidence from Italy pp. 27.
251. Lara Magnani [1998] "Un'analisi del distretto industriale fondata sulla moderna teoria economica dell'organizzazione" pp. 46.
252. Mario Forni, Lucrezia Reichlin [1998] "Federal Policies and Local Economies: Europe and the US" pp. 24.
253. Luigi Brighi [1998] "A Case of Optimal Regulation with Multidimensional Private Information" pp 20.
254. Barbara Pistoresi, Stefania Luppi [1998] "Gli investimenti diretti esteri nell'America Latina e nel Sud Est Asiatico. 1982-1995" pp 27.
255. Paola Mengoli, Margherita Russo [1998] "Technical and Vocational Education and Training in Italy: Structure and Changes at National and Regional Level" pp 25.
256. Tindara Addabbo [1998] "On-the-Job Search a Microeconomic Analysis on Italian Data" pp. 29.
257. Lorenzo Bertucelli [1999] "Il paternalismo industriale: una discussione storiografica" pp.21.
258. Mario Forni e Marco Lippi [1999] "The generalized dynamic factor model: representation theory" pp. 25.
259. Andrea Ginzburg e Annamaria Simonazzi [1999] "Foreign debt cycles and the 'Gibson Paradox': an interpretative hypothesis" pp. 38.
260. Paolo Bosi [1999] "La riforma della spesa per assistenza dalla Commissione Onofri ad oggi: una valutazione in corso d'opera" pp. 56.
261. Marcello D'Amato e Barbara Pistoresi [1999] "Go and soothe the row. Delegation of monetary policy under private information" pp. 23.
262. Michele Lalla [1999] "Sampling, Maintenance, and Weighting Schemes for Longitudinal Surveys: a Case Study of the Textile and Clothing Industry" pp. 27.
263. Pederzoli Chiara e Torricelli Costanza [1999] "Una rassegna sui metodi di stima del Value at Risk (Var)".
264. Paolo Bosi, Maria Cecilia Guerra e Paolo Silvestri [1999] "La spesa sociale di Modena. La valutazione della condizione economica" pp 74.
265. Graziella Bertocchi e Michael Spagat [1999] "The Politics Co-optation" pp 14.
266. Giovanni Bonifati [1999] "The Capacity to Generate Investment. An analysis of the long-term determinants of investment" pp.22.
267. Tindara Addabbo e Antonella Caiumi [1999] "Extended Income and Inequality by Gender in Italy" pp. 40.
268. Antonella Caiumi e Federico Perali [1999] "Children and Intrahousehold Distribution of Resources: An Estimate of the Sharing Rule of Italian Households" pp.24
269. Vincenzo Atella, Antonella Caiumi e Federico Perali [1999] "Una scala di equivalenza non vale l'altra" pp.23.

- 270 Tito Pietra e Paolo Siconolfi [1999] "Volume of Trade and Revelation of Information" pp. 33.
- 271 Antonella Picchio [1999] "La questione del lavoro non pagato nella produzione di servizi nel nucleo domestico (Household)" pp.58.
- 272 Margherita Russo [1999] "Complementary Innovations and Generative Relationships in a Small Business Production System: the Case of Kervit" pp.27.
- 273 André Dumas [1999] "L'Economie de la drouge" pp. 12.
- 274 André Dumas [1999] "L'Euro à l'heure actuelle" pp. 12.
- 275 Michele Lalla Gisella Facchinetti [1999] "La valutazione dell'attività didattica: un confronto tra scale di misura e insiemi sfocati" pp.32.
- 276 Mario Biagioli [1999] "Formazione e valorizzazione del capitale umano: un'indagine sui paesi dell'Unione Europea" pp.21.
- 277 Mario Biagioli [1999] "Disoccupazione, formazione del capitale umano e determinazione dei salari individuali: un'indagine su microdati nei paesi dell'Unione Europea" pp.15.
- 278 Gian Paolo Caselli Giulia Bruni [1999] Il settore petrolifero russo, il petrolio del Mar Caspio e gli interessi geopolitici nell'area" pp. 28.
- 279 Luca Gambetti [1999] "The Real Effect of Monetary Policy: a New Var Identification Procedure" pp.22.
- 280 Marcello D'Amato Barbara Pistoiesi [1999] "Assessing Potential Targets for Labour Market Reforms in Italy" pp. 8.
- 281 Gian Paolo Caselli Giulia Bruni e Francesco Pattarin [1999] "Gaddy and Ickes Model of Russian Barter Economy: Some Criticisms and Considerations" pp.10.
- 282 Silvia Muzzioli Costanza Torricelli [1999] "A Model for Pricing an Option with a Fuzzy Payoff" pp. 13.
- 283 Antonella Caiumi Federico Perali [1999] "Povertà e Welfare in Italia in Relazione alla Scelta della Scala di Equivalenza" pp.25.
- 284 Marcello Galli Tommaso Minerva [1999] "Algoritmi Genetici per l'Evoluzione di Modelli Lineari *Metodologia ad Applicazioni*" pp.36.
- 285 Mario Forni Sergio Paba [1999] "Knowledge Spillovers and the Growth of Local Industries" pp. 20.
- 286 Gisella Facchinetti Giovanni Mastroleo [1999] "Un confronto tra uno score card ed un approccio fuzzy per la concessione del credito personale" pp.27.
- 287 Gisella Facchinetti Giovanni Mastroleo e Sergio Paba [1999] "A Statistical and Fuzzy Algorithm for the Identification of Industrial Districts" pp.6.
- 288 Tommaso Minerva [1999] "Didattica e Informatica. *Una indagine Statistica relativa alla Provincia di Modena sul rapporto tra Insegnanti e Nuove Tecnologie*" pp. 46.
- 289 Andrea Ginzburg [1999] "Straffa e l'analisi sociale: alcune note metodologiche" pp. 37.