

\\ 292 \\

Il Principio d'Induzione Euristica-Mente Parlando

di

Consolato Pellegrino*
Maria Teresa Brandoli**

Dicembre 1999

* Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia
Dipartimento di Matematica
Via Campi, 213/B
41100 Modena (Italia)
e-mail:pellegrino@unimo.it

** Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia
Dipartimento di Economia Politica
Via Berengario, 51
41100 Modena (Italia)
e-mail:mbrandol@unimo.it

IL PRINCIPIO D'INDUZIONE EURISTICA-MENTE PARLANDO (*)

Sommario. *In questo lavoro discutiamo, sotto forma di dialogo, uno degli aspetti più problematici del principio d'induzione: la formulazione dell'ipotesi da dimostrare.*

SIGNORE POLEMICO (*con tono aggressivo*) Ma [queste formule] le ha tirate fuori così...

LANG No, non le ho tirate fuori «così», ma qualcuno, tanto tempo fa, le ha pensate «così».

SIGNORE POLEMICO Ah, davvero? Così di un tratto?

LANG No, naturalmente no, stava lavorando con la matematica, riflettendo su tante cose, e poi si accorse che queste formule davano delle soluzioni. Arrivò a tanto, perché era un buon matematico e ci aveva pensato abbastanza. Una volta scoperto, questo risultato venne usato e copiato dalle generazioni successive. Questo è ciò che ho fatto anch'io, e non rivendico altro.

Serge LANG, 1985, trad. ital. 1991, p. 39

UNO STUDENTE Come si trova questa dimostrazione?

LANG Un buon matematico, dopo qualche giorno di tentativi, sarebbe in grado di intuire il «sia», e poi, con un po' di algebra, dimostrare che il «sia» funziona. Ecco la differenza tra un buon matematico e un'altra persona che non saprebbe mai trovare il «sia» e tanto meno la dimostrazione. Ecco la differenza tra il fare ricerca in matematica ed il non farla. Questo è il tipo di lavoro che fanno i matematici. Cominciano come Selim. Procedono per tentativi e, dopo un po', vedono che funziona e trovano la dimostrazione. Ecco la risposta alla tua domanda.

Serge LANG, 1985, trad. ital. 1991, p. 232

Io e Sara abbiamo finito di stendere la relazione per il Consiglio di Istituto. Finalmente possiamo rilassarci un po' di fronte ad una tazza di tè. Sara, indicando il libro che sta sul mio tavolo da lavoro, esclama:

« Mmmh!... quel libro è uno dei classici della divulgazione matematica. »

« Sì! a oltre cinquant'anni dalla sua apparizione conserva tutto il suo fascino ed è ancora in catalogo. »

« È il primo libro in cui ho visto trattare in modo elementare concetti e metodi base della matematica. »

« Anche per me è stato così. Eppure contiene una affermazione che mi ha sempre lasciata perplessa. »

« Ah sì? ... e qual è questa affermazione? »

* Lavoro eseguito nell'ambito delle attività finanziate dal MURST (Progetto "Ricerche di Matematica e di Informatica per la Didattica").

Apro il libro³ in corrispondenza del cartoncino da me posto tra le pagine e comincio a leggere:

« Come esercizio, il lettore può dimostrare con il principio di induzione che

$$(5) \quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

Si deve osservare che, benché il principio di induzione sia sufficiente a dimostrare la formula (5) una volta che essa sia stata scritta, la dimostrazione non indica affatto come si sia prima arrivati a questa formula... »

« È ovvio che qualunque sia il teorema o la proposizione da dimostrare occorre sempre aver ben chiaro dove si vuole arrivare, » dice Sara interrompendo la mia lettura.

« D'accordo ma stai a sentire come prosegue il discorso, » rispondo riprendendo a leggere:

« ... in essa non interviene l'elemento creativo che si trova invece nella scelta delle possibilità da prendersi in esame. La questione dell'origine dell'*ipotesi* (5) appartiene ad un regno in cui non possono essere date regole del tutto generali; in esso entrano in campo l'esperimento, l'analogia, e l'intuizione costruttiva. »

« Anche questo è ovvio, » replica Sara per nulla impressionata.

Chiudo il libro e cerco di spiegarmi con parole mie:

« Sì, è chiaro: non esiste una regola generale ma da sempre sospetto che, per questioni aritmetiche come quelle della formula (5), ci sia un qualche ambito o metodo che consenta di stabilire l'*ipotesi* da verificare. »

A questa mia affermazione Sara, depone nel piattino la tazza di tè che stava degustando, scuote un po' la testa e poi, con tono materno, sentenzia:

« Ti conosco bene. So che sei una fervente sostenitrice del metodo euristico⁴. Io invece penso che in certi casi ci voglia un colpo di genio e non mi interessa sapere da dove venga. Oltre tutto i geni sono rari, molto rari. È così... È sempre stato così... *Non puoi sempre fare la visionaria...* Ti devi rassegnare una buona volta. »

« In questo caso direi proprio di no. »

« Hai trovato il libro giusto? Qualcuno ti ha rivelato l'arcano? » chiede Sara, alquanto sorpresa.

« Niente di tutto questo, » rispondo tranquillamente. Mi fermo per bere un sorso di tè, poi proseguo: « Sino a poco tempo fa era solo una mia sensazione. Oggi però ho motivi per pensare che avevo ragione. »

« Credi o lo sai? Hai forse trovato tu questo metodo? »

« Eh... Magari! »

« E allora? »

« Il fatto è che l'altro giorno mentre usavo DERIVE mi sono resa conto che il comando "Calcola Somma" consente di calcolare anche il termine generale di molte serie: guarda questa stampa... » (v. la seguente tavola).

³ Cfr. Courant R. e Robbins H. 1941, ediz. ital. 1998, pag. 52.

⁴ Cfr. ad es. Polya G. 1945, trad. ital. 1967, ed in particolare i paragrafi "Euristica" e "Ragionamento euristico" alle pp. 124-125.

File: ????.mth

Data: 01/06/99

Ora: 12.00.44

#1: $\sum_{k=1}^n k$ Serie(Utente,n)

#2: $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$ 0.0s Semplificazione(#1)

#3: $\sum_{k=1}^n k^2$ Serie(Utente,n)

#4: $\frac{n \cdot (n+1) \cdot (2 \cdot n+1)}{6}$ 0.1s Semplificazione(#3)

#5: $\sum_{k=1}^n k^3$ Serie(Utente,n)

#6: $\frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$ 0.1s Semplificazione(#5)

#7: $\sum_{k=1}^n k^4$ Serie(Utente,n)

#4: $\frac{n \cdot (n+1) \cdot (6 \cdot n^3 + 9 \cdot n^2 + n - 1)}{30}$ 0.1s Semplificazione(#7)

« È vero! Hai ragione. Ci deve proprio essere un algoritmo o una tecnica per il calcolo della ridotta n -esima di serie come queste: stento a credere che in DERIVE siano memorizzate, una per una, questo tipo di formule. »

« E quale può essere questo algoritmo? »

« Al momento non riesco ad immaginarlo: però... »

« Però cosa? »

« Possiamo provare a ricostruirlo da noi: *chi fa da sé fa per tre.* »

« Sarebbe bello ma non so da dove cominciare: *adesso sei tu a fare la visionaria.* »

Questa mia affermazione non turba minimamente Sara che, indicando il foglio che le avevo mostrato, dice:

« Beh, qualche informazione l'abbiamo: conosciamo la somma dei primi *enne* interi (cfr. *tav.*, *riga* #2), quella dei loro quadrati (cfr. *tav.*, *riga* #4), quella dei loro cubi (cfr. *tav.*, *riga* #6) e persino quella delle loro quarte potenze (cfr. *tav.*, *riga* #8). Mi sembra che bastino. »

Colgo la palla al balzo (come avrete capito Sara non sempre è accondiscendente con le mie debolezze) e, tracciando i vari passaggi su un bloc notes, provo a dare spazio alle mie capacità di indagine:

« La somma S dei primi *enne* numeri naturali è facilmente intuibile: se consideriamo che

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n$$

$$S = n + (n-1) + \dots + 3 + 2 + 1$$

sommando membro a membro abbiamo l'eguaglianza

$$\begin{aligned} 2S &= \underbrace{(1+n) + (2+n-1) + \dots + (n-2+3) + (n-1+2) + (n+1)}_{n \text{ addendi}} = \\ &= \underbrace{(n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1) + (n+1)}_{n \text{ addendi}} = n(n+1) \end{aligned}$$

che consente di formulare "l'ipotesi"

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Quest'ultima, una volta verificata per induzione, consente di stabilire che il termine generale della successione

$$1, 3, 6, 10, 15, 21, \dots$$

formata dalle somme dei primi *enne* numeri naturali è

$$\frac{n(n+1)}{2}. \gg$$

« Questo lo so, » dice Sara. Ma non ci dà idee per affrontare gli altri casi. »

« Beh. Vediamo un altro caso. La successione dei cubi dei numeri naturali è

$$1, 8, 27, 64, 125, \dots$$

Pertanto la successione delle somme dei primi *enne* cubi è

$$1, 9, 36, 100, 225, \dots$$

essa può essere scritta

$$1^2, 3^2, 6^2, 10^2, 15^2, \dots$$

e ciò, se teniamo conto del precedente risultato, consente di formulare "l'ipotesi"

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

che è conforme al risultato di DERIVE e che possiamo verificare per induzione. »

« D'accordo, ma anche questo discorso non può essere generalizzato e quindi non aiuta a risolvere la questione: stavolta, per formulare l'ipotesi, ti sei basata sul risultato

precedente. » Detto ciò Sara si ferma, riflette un po' e, cominciando a scrivere a sua volta sul bloc notes, dice: « Ad esempio la successione dei quadrati dei numeri naturali è

1, 4, 9, 16, 25, 36, ...

di conseguenza quella della somma dei primi *enne* quadrati è

1, 5, 14, 30, 55, 91, ...

ed io francamente non ci vedo nulla. »

Perfettamente conscia delle obiezioni di Sara mi estranio e, mentre mantengo la tazza sospesa davanti alle mie labbra, ripeto tra me e me l'ultima parte del passo letto prima:

“ La questione dell'origine dell'*ipotesi* (5) appartiene ad un regno in cui non possono essere date regole del tutto generali; in esso entrano in campo l'esperimento, l'analogia, e l'intuizione costruttiva.”

Improvvisamente in me scatta qualcosa e quella frase, che mi sembrava una dichiarazione di impotenza, adesso nella mia testa suona così:

“ La questione dell'origine dell'*ipotesi* appartiene ad un regno in cui entrano in campo l'esperimento, l'analogia, e l'intuizione costruttiva.”

Sara si è accorta che qualcosa mi sta frullando nel cervello e, con fare discreto, mi segue senza intervenire ma, appena bevo un sorso di tè, mi esorta a esprimere il mio pensiero; cosa che faccio di buon grado:

« Sì, penso proprio che qualcosa si possa fare... Direi che viene fuori un procedimento un po' macchinoso... un procedimento di cui al momento non riesco ad individuare la portata o se preferisci i limiti di applicazione... Un procedimento abbastanza generale per stabilire quale possa essere la somma $S_r(n)$ delle r -esime potenze dei primi *enne* numeri naturali. »

« Credo di intuire. Dimmi se pensiamo la stessa cosa... ». Sara si ferma, si concentra e, solo dopo un mio cenno d'assenso, prosegue: « Diamo per scontato di sapere che

$$S_1(n) = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{e} \quad S_3(n) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2. \quad \text{»}$$

« Sì, diamo per scontati questi risultati che, come abbiamo visto, sono facilmente intuibili. »

« Supponiamo, tanto per fissare le idee, di voler calcolare $S_2(n)$ e, per capire quali ipotesi fare, chiediamoci: Cosa hanno in comune le formule che esprimono $S_1(n)$ ed $S_3(n)$? »

« È evidente. Sono dei polinomi in n a coefficienti razionali. »

« E allora cosa pensi che si possa dire per $S_2(n)$? »

« Penso che $S_2(n)$ debba essere un polinomio di grado tre. »

« E perché pensi che sia un polinomio di grado tre? »

« Penso che $S_2(n)$ sia un polinomio di grado *tre* proprio perché $S_1(n)$ è un polinomio di grado *due* ed $S_3(n)$ è un polinomio di grado *quattro*. »

« Allora il nostro problema si trasforma in un altro problema... »

« Sì, possiamo congetturare che

$$S_2(n) = a + bn + cn^2 + dn^3$$

e quindi il nostro problema si trasforma nel problema di determinare i coefficienti a, b, c, d di $S_2(n)$ in modo che per

$$n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$$

$S_2(n)$ assuma rispettivamente i valori

$$1, 5, 14, 30, 55, 91, \dots \gg$$

« ... di conseguenza, se la nostra ipotesi è giusta, abbiamo più informazioni di quante ce ne servano per determinare a, b, c, d , » sentenza Sara che, presa dall'entusiasmo, dopo aver scritto sul bloc notes

$$\begin{cases} S_2(1) = a + b \cdot 1 + c \cdot 1^2 + d \cdot 1^3 \\ S_2(2) = a + b \cdot 2 + c \cdot 2^2 + d \cdot 2^3 \\ S_2(3) = a + b \cdot 3 + c \cdot 3^2 + d \cdot 3^3 \\ S_2(4) = a + b \cdot 4 + c \cdot 4^2 + d \cdot 4^3 \end{cases}$$

aggiunge: « ... il che vuole dire che intanto a, b, c, d , devono soddisfare il seguente sistema

$$\begin{cases} a + b \cdot 1 + c \cdot 1^2 + d \cdot 1^3 = 1 \\ a + b \cdot 2 + c \cdot 2^2 + d \cdot 2^3 = 5 \\ a + b \cdot 3 + c \cdot 3^2 + d \cdot 3^3 = 14 \\ a + b \cdot 4 + c \cdot 4^2 + d \cdot 4^3 = 30 \end{cases}$$

che, come vedi, è lineare di quattro equazioni nelle quattro incognite $a, b, c, d, \dots \gg$

« Se è per questo io vedo anche che

$$\begin{vmatrix} 1 & 1^1 & 1^2 & 1^3 \\ 1 & 2^1 & 2^2 & 2^3 \\ 1 & 3^1 & 3^2 & 3^3 \\ 1 & 4^1 & 4^2 & 4^3 \end{vmatrix}$$

è il determinante di Vandermonde⁵ dei numeri 1, 2, 3, 4, che, essendo distinti, è diverso da zero. Il che non è poco in quanto ci dice che il nostro sistema è *normale* e quindi ammette una ed una sola soluzione. »

« Piano! Piano! un determinante di chi? » interviene mio figlio Luigi che, avvicinandosi in precedenza per prendere un po' di tè, aveva cominciato a seguire il nostro discorso.

⁵ Vandermonde Alexandre Theophile (1735-1796) matematico, fisico ed economista francese. Si formò culturalmente nell'ambiente degli enciclopedisti. Fece parte della commissione per il sistema metrico decimale.

« Un determinante di Vandermonde, » precisa Sara. « Uno dei tanti enti matematici che hanno importanti proprietà e che, come in questo caso, saltano fuori in un modo, che solo ai non addetti ai lavori, appare inaspettato. »

Io, conoscendo la ritrosia di Luigi per i formalismi, cerco di fare capire a Sara che non è il caso di indulgere in troppi particolari, ma lei, incurante, prosegue:

« Vedi Luigi, il determinante di Vandermonde di *enne* numeri $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, è il numero $V(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ che si ottiene calcolando il determinante della matrice $n \times n$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} . \gg$$

« Vedo! » dice Luigi, « quello che non capisco però, è perché $V(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ debba essere diverso da zero se $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, sono distinti tra loro. »

« Oh! ... questo non è poi tanto difficile se tieni conto del fatto che

$$V(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \prod_{i < j} (x_j - x_i). \gg$$

« Capisco, capisco ... Ma capisco anche che determinare a, b, c, d , sarà dura: anche se applicate la regola di Cramer⁶ dovreste calcolare quattro determinanti che, a differenza di quello dei coefficienti del sistema, non è di Vandermonde. »

Io, che apprezzo molto l'interesse dimostrato da Luigi, colgo anche questa palla al volo e riprendo il discorso:

« Forse hai ragione. Ma ricorda, per certi versi la matematica è l'arte di evitare i calcoli inutili. Attenzione quindi: noi vogliamo risolvere il sistema per trovare $S_2(n)$ e quindi se la risoluzione di questo sistema ti sembra pesante possiamo cercarne un altro. »

Luigi mi guarda perplesso. Sara, compiaciuta per l'atmosfera che si è venuta a creare, cavallerescamente si mette tranquilla e mi porge penna e bloc notes. Io, schiarita la voce, do una occhiata ai miei interlocutori e parto con un affondo:

« Avete qualcosa in contrario se pongo

$$S_2(n) = a + b(n-1) + c(n-1)(n-2) + d(n-1)(n-2)(n-3)? \gg$$

« Beh, no. In fondo sviluppando i calcoli si ottiene un polinomio di terzo grado. E ..., forse vale anche il viceversa. Certo però che i coefficienti a, b, c, d , non sono gli stessi di prima... »

« E sì, Luigi, hai perfettamente ragione, » ribatto io. « In effetti vale anche il viceversa. Credo che c'entrino i numeri di Stirling di seconda specie⁷ o qualcosa di molto vicino, ma direi che al momento possiamo evitare di approfondire il discorso. »

⁶ Cramer Gabriel (1704-1752) professore a Ginevra. Si occupò prevalentemente di geometria analitica.

⁷ Stirling James (1692-1770) matematico scozzese amico di Newton. Ha dato contributi nel campo dell'analisi. Chi volesse informazioni sui numeri di Stirling e sui polinomi fattoriali può consultare Spiegel 1971, trad. it. 1981, pp. 6-7.

« D'accordo mamma... Tanto è fatta, » sentenzia Luigi che, animato da un piglio inconsueto, si impossessa della penna e dopo aver scritto sul bloc notes

$$\begin{cases} S_2(1) = a \\ S_2(2) = a + b(2-1) \\ S_2(3) = a + b(3-1) + c(3-1)(3-2) \\ S_2(4) = a + b(4-1) + c(4-1)(4-2) + d(4-1)(4-2)(4-3) \end{cases}$$

aggiunge: « ... il che vuole dire che in questo caso a, b, c, d soddisfano il seguente sistema

$$\begin{cases} a & = 1 \\ a + 1 \cdot b & = 5 \\ a + 2 \cdot b + 2 \cdot c & = 14 \\ a + 3 \cdot b + 6 \cdot c + 6 \cdot d & = 30 \end{cases}$$

dove non solo si vede che la soluzione c'è ed è unica, ma è anche immediato calcolarla. » Luigi si avvia a risolvere il nuovo sistema. Dalla prima equazione ricava $a = 1$, sostituisce questo valore nella seconda equazione e ricava $b = 4$, poi, proseguendo a "cascata", determinata la soluzione

$$a = 1, \quad b = 4, \quad c = \frac{5}{2}, \quad d = \frac{1}{3};$$

del sistema, scrive

$$S_2(n) = 1 + 4(n-1) + \frac{5}{2}(n-1)(n-2) + \frac{1}{3}(n-1)(n-2)(n-3).$$

Noi cerchiamo di complimentarci con lui, ma Luigi mentre dice:

« Devo completare l'opera, » prosegue imperterrito a sviluppare l'espressione ottenuta e giunge così a scrivere

$$S_2(n) = \frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n).$$

Io e Sara confrontiamo questo risultato con quello fornito da DERIVE. Luigi chiede spiegazioni e, una volta che si è reso conto della questione, esclama:

« Un altro piccolo sforzo: è un gioco da ragazzi. » Poi, riprendendo a fare i calcoli, scrive:

$$\begin{aligned} S_2(n) &= \frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n) = \frac{1}{6}n(2n^2 + 3n + 1) = \frac{1}{6}n(2n^2 + 2n + n + 1) = \\ &= \frac{1}{6}n(2n(n+1) + (n+1)) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1). \end{aligned}$$

Ancora una volta cerchiamo di ringraziare il nostro “esperto” il quale però, messe da parte gli aspetti tecnici di tutta la questione, ci interroga sui fini di tutto questo calcolo. Noi gli spieghiamo che il nostro intento era quello di trovare una espressione che consentisse di calcolare in modo semplice la somma dei primi *enne* quadrati. Questa spiegazione sorprende un po’ Luigi che dopo aver calcolato $S_2(4)$ ed $S_2(5)$ ed aver stabilito che essi sono 55 e 91, chiede:

« Sì, questi valori coincidono con quelli attesi, ma, dal momento che noi abbiamo utilizzato solo i primi quattro valori di $S_2(n)$, come facciamo a dire che il risultato vale qualunque sia il valore di *enne*? »

« Questa è una bella domanda! » diciamo in coro io e Sara.

« Che esige una risposta, » puntualizza Luigi.

« La risposta sta nel cosiddetto principio d’induzione, » rispondo io, che, volendo tenere agganciato Luigi al nostro discorso, mi limito ad aggiungere:

« Per quanto interessa qui, il principio d’induzione dice che, data una proposizione $P(n)$ in cui n indica un generico numero naturale: se $P(n)$ è vera per $n = 1$ e se per ogni n $P(n)$ implica $P(n+1)$; allora $P(n)$ è vera per ogni n . »

« Questo principio è un po’ strano: apparentemente si presenta come un circolo vizioso ma, ... a ben pensarci, non è altro che un modo, ... un modo per esplicitare cosa sottintendiamo quando concludiamo un ragionamento con “è così via”. »

« Beh sì, » dico io « in qualche modo è così: in sostanza questo è uno dei cinque assiomi su cui Peano⁸ ha fondato l’aritmetica. »

« Ricordo: qualche volta me ne avevi parlato. Ma torniamo al nostro discorso. » Luigi si concentra, ci guarda e poi parte: « In primo luogo abbiamo che la formula

$$S_2(n) = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

è vera per $n = 1$ in quanto

$$S_2(1) = 1 \quad \text{e} \quad \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot (1+1)(2 \cdot 1+1) = 1.$$

In secondo luogo supposto che

$$S_2(n) = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

e considerato che

$$S_2(n+1) = S_2(n) + (n+1)^2,$$

resta da verificare che

$$S_2(n+1) = \frac{1}{6} (n+1)(n+2)(2(n+1)+1). »$$

⁸ Peano Giuseppe (1858-1932). Fu uno dei grandi della matematica contemporanea.

« Eh sì, » commenta Sara. Luigi confortato riprende i calcoli, di tanto in tanto si ferma per riflettere, e via via scrive:

$$\begin{aligned} S_2(n+1) &= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 = (n+1) \frac{n(2n+1) + 6(n+1)}{6} = \\ &= (n+1) \frac{2n^2 + n + 6n + 6}{6} = (n+1) \frac{2n^2 + 4n + 3n + 6}{6} = \\ &= (n+1) \frac{(2n(n+2)) + (3(n+2))}{6} = \frac{1}{6} (n+1)(n+2)(2(n+1)+1). \end{aligned}$$

« E questo chiude la questione... Ma..., » dice Luigi posando la penna sul tavolo.

« Ma cosa? » chiedo io.

« E se la verifica non fosse andata a buon fine? »

« Semplice: se la verifica non fosse andata a buon fine l'ipotesi sarebbe stata da rigettare una volta per tutte e non ci sarebbe rimasto altro che cercare una nuova "ipotesi". »

« D'accordo » dice Luigi, riflette un attimo e poi chiede: « Sbaglio o questo procedimento può essere applicato in casi analoghi? »

« No, non sbagli, » rispondo, « questo procedimento può essere applicato, così come abbiamo fatto, in tutti quei casi in cui "l'ipotesi" da assumere è un polinomio di cui si riesce a stabilire a priori il grado. »

« Luigi, complimenti! » dice Sara: « Vedo che hai inquadrato perfettamente la questione. » Poi con voce più sommessa aggiunge: « Resta del tutto aperto, almeno per noi, il caso in cui "l'ipotesi" non è un polinomio. »

Luigi, malgrado le ansie di Sara, è visibilmente soddisfatto. Dà l'idea di aver apprezzato più l'escursione tra le idee ed i metodi della matematica effettuata in nostra compagnia che l'averci dato una prova delle sue doti di "calcolatore" rapido ed affidabile. Lo capisco e, da madre, mi fa male al cuore ammetterlo: a scuola si è formata l'idea che "la matematica è un puro strumento", "un'ancella senz'anima al servizio della scienza e della tecnica" ed a nulla sono serviti i miei discorsi per mettere in crisi questa sua convinzione. Di conseguenza, dentro di me, io sono più soddisfatta di lui. Vorrei approfittare di questo momento ma devo rinviare ad una prossima occasione: mi tocca ricordargli l'appuntamento con i suoi amici. Luigi dà una occhiata all'orologio:

« Uh, è vero! » esclama rientrando nella sua realtà; si alza, ci abbraccia affettuosamente e mentre si affretta ad uscire si volta e ci apostrofa: « Il seguito alla prossima puntata! »

« E già... Il seguito alla prossima puntata, » ripete Sara poi, mentre con calma raccoglie le sue cose aggiunge: « Devo ammetterlo ormai sono più che convinta: ci deve essere una qualche teoria, un teorema che consente di stabilire il termine generale di molte serie... Chissà chi è quel genio, quel gigante della matematica che ce li ha regalati? »

« E no Sara. Allora è proprio inutile sperarlo: non cambi mai, » dico io. Poi riprendendo Polya, in modo volutamente enfatico, ribatto: « Un'idea geniale risolve spesso un grande problema, ma nella risoluzione di tutti i problemi interviene un pizzico di genialità. Può trattarsi di un problema modesto; tuttavia, se esso stuzzica la nostra curiosità ed eccita le nostre facoltà mentali e, soprattutto, se si riesce a risolverlo da soli, si scoprirà l'ansia della

ricerca e la gioia della scoperta. Simili esperienze, fatte a tempo opportuno, possono rappresentare un vero e proprio esercizio dello spirito e lasciare un'impronta nell'animo e nel carattere per tutta la vita. »⁹

« Beh, in questo caso devo darti ragione: è la prima volta che vedo Luigi inserirsi in una delle nostre disquisizioni matematiche. In ogni caso ricorda: il primo che viene a sapere chi e come ha risolto la questione informa l'altro. »¹⁰

Nota. Se, come nei casi qui trattati, "l'ipotesi" da sottoporre al vaglio del principio d'induzione è un polinomio questo può essere individuato direttamente mediante la formula di Gregory-Newton¹¹ che, per il calcolo delle differenze finite (cfr. ad es. Spiegel 1971, trad. ital. 1981, p. 9; o più semplicemente Gardner 1966, trad. ital. 1973, pp. 230-243, e la bibliografia ivi riportata), rappresenta ciò che la formula di Taylor¹² rappresenta per il calcolo differenziale.

Riferimenti Bibliografici

- COURANT R. e ROBBINS H., 1941, *What is Mathematics?* Oxford, University Press, New York (ediz. ital. 1998, *Che cos'è la Matematica?*, Bollati Boringhieri, Torino, pp. 752).
- GARDNER M., 1966, *Martin Gardner's new mathematical diversions from Scientific American*, Simon and Shuster Inc., New York, 1966 (trad. ital. 1973, *Enigmi e Giochi Matematici*, Sansoni, Firenze, pp. 254).
- LANG S., 1985, *The Beauty of Doing Mathematics. Three Public Dialogues Math! Encounters with High School Students*, Springer-Verlag, New York (trad. ital. 1991, *La bellezza della Matematica*, Bollati Boringhieri, Torino, pp. 266).
- POLYA G., 1945, *How to solve it*, Princeton University Press (trad. ital. 1967, *Come risolvere i problemi di matematica - Logica ed euristica nel metodo matematico*, Feltrinelli, Milano, pp. 252).
- SPIEGEL M.R., 1971, *Finite Differences and Difference Equation*, McGraw-Hill Book Company, New York (trad. ital. 1981, *Differenze Finite ed Equazioni alle Differenze*, Etas Libri, Milano, pp. 260).

⁹ Cfr. ad es. Polya G. 1945, trad. ital. 1967, p. 7.

¹⁰ Dal momento che noi, come le simpatiche protagoniste di questa storia, nutriamo lo stesso sospetto, invitiamo gentilmente chiunque fosse informato al riguardo di scriverci ad uno degli indirizzi riportati all'inizio dell'articolo.

¹¹ Gregory James (1673-1675) matematico e astronomo scozzese. Fu tra gli anticipatori del calcolo infinitesimale.

Newton Isaac (1642-1727) scienziato inglese. Scoprì la scomposizione in colori della luce bianca, ideò il calcolo infinitesimale (per la priorità di questa scoperta entrò in polemica con Leibniz). Pose le basi della meccanica ed elaborò la teoria della gravitazione universale (pubblicata in *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, 1687).

¹² Taylor Brook (1665-1731) matematico inglese. Contribuì allo sviluppo ed alle applicazioni del calcolo infinitesimale. Pubblicò un trattato sulla prospettiva. Condusse ricerche in vari ambiti scientifici. Scrisse di musica ed ebbe interessi filosofici.

1. Maria Cristina Marcuzzo [1985] "Yoan Violet Robinson (1903-1983)", pp. 134
2. Sergio Lugaresi [1986] "Le imposte nelle teorie del sovrappiù", pp. 26
3. Massimo D'Angelillo e Leonardo Paggi [1986] "PCI e socialdemocrazie europee. Quale riformismo?", pp. 158
4. Gian Paolo Caselli e Gabriele Pastrello [1986] "Un suggerimento hobsoniano su terziario ed occupazione: il caso degli Stati Uniti 1960/1983", pp. 52
5. Paolo Bosi e Paolo Silvestri [1986] "La distribuzione per aree disciplinari dei fondi destinati ai Dipartimenti, Istituti e Centri dell'Università di Modena: una proposta di riforma", pp. 25
6. Marco Lippi [1986] "Aggregations and Dynamic in One-Equation Econometric Models", pp. 64
7. Paolo Silvestri [1986] "Le tasse scolastiche e universitarie nella Legge Finanziaria 1986", pp. 41
8. Mario Forni [1986] "Storie familiari e storie di proprietà. Itinerari sociali nell'agricoltura italiana del dopoguerra", pp. 165
9. Sergio Paba [1986] "Gruppi strategici e concentrazione nell'industria europea degli elettrodomestici bianchi", pp. 56
10. Nerio Naldi [1986] "L'efficienza marginale del capitale nel breve periodo", pp. 54
11. Fernando Vianello [1986] "Labour Theory of Value", pp. 31
12. Piero Ganugi [1986] "Risparmio forzato e politica monetaria negli economisti italiani tra le due guerre", pp. 40
13. Maria Cristina Marcuzzo e Annalisa Rosselli [1986] "The Theory of the Gold Standard and Ricardo's Standard Comodity", pp. 30
14. Giovanni Solinas [1986] "Mercati del lavoro locali e carriere di lavoro giovanili", pp. 66
15. Giovanni Bonifati [1986] "Saggio dell'interesse e domanda effettiva. Osservazioni sul cap. 17 della General Theory", pp. 42
16. Marina Murat [1986] "Betwin old and new classical macroeconomics: notes on Lejonhufvud's notion of full information equilibrium", pp. 20
17. Sebastiano Brusco e Giovanni Solinas [1986] "Mobilità occupazionale e disoccupazione in Emilia Romagna", pp. 48
18. Mario Forni [1986] "Aggregazione ed esogeneità", pp. 13
19. Sergio Lugaresi [1987] "Redistribuzione del reddito, consumi e occupazione", pp. 17
20. Fiorenzo Sperotto [1987] "L'immagine neopopulista di mercato debole nel primo dibattito sovietico sulla pianificazione", pp. 34
21. M. Cecilia Guerra [1987] "Benefici tributari nel regime misto per i dividendi proposto dalla commissione Sarcinelli: una nota critica", pp. 9
22. Leonardo Paggi [1987] "Contemporary Europe and Modern America. Theories of Modernity in Comparative Perspective", pp. 38
23. Fernando Vianello [1987] "A Critique of Professor Goodwin's 'Critique of Sraffa'", pp. 12
24. Fernando Vianello [1987] "Effective Demand and the Rate of Profits. Some Thoughts on Marx, Kalecki and Sraffa", pp. 41
25. Anna Maria Sala [1987] "Banche e territorio. Approccio ad un tema geografico-economico", pp. 40
26. Enzo Mingione e Giovanni Mottura [1987] "Fattori di trasformazione e nuovi profili sociali nell'agricoltura italiana: qualche elemento di discussione", pp. 36
27. Giovanna Procacci [1988] "The State and Social Control in Italy During the First World War", pp. 18
28. Massimo Matteuzzi e Annamaria Simonazzi [1988] "Il debito pubblico", pp. 62
29. Maria Cristina Marcuzzo (a cura di) [1988] "Richard F. Kahn. A discipline of Keynes", pp. 118
30. Paolo Bosi [1988] "MICROMOD. Un modello dell'economia italiana per la didattica della politica fiscale", pp. 34
31. Paolo Bosi [1988] "Indicatori della politica fiscale. Una rassegna e un confronto con l'aiuto di MICROMOD", pp. 25
32. Giovanna Procacci [1988] "Protesta popolare e agitazioni operaie in Italia 1915-1918", pp. 45
33. Margherita Russo [1988] "Distretto Industriale e servizi. Uno studio dei trasporti nella produzione e nella vendita delle piastrelle", pp. 157
34. Margherita Russo [1988] "The effect of technical change on skill requirements: an empirical analysis", pp. 28
35. Carlo Grillenzoni [1988] "Identification, estimations of multivariate transfer functions", pp. 33
36. Nerio Naldi [1988] "'Keynes' concept of capital", pp. 40
37. Andrea Ginzburg [1988] "locomotiva Italia?", pp. 30
38. Giovanni Mottura [1988] "La 'persistenza' secolare. Appunti su agricoltura contadina ed agricoltura familiare nelle società industriali", pp. 40
39. Giovanni Mottura [1988] "L'anticamera dell'esodo. I contadini italiani della 'restaurazione contrattuale' fascista alla riforma fondiaria", pp. 40
40. Leonardo Paggi [1988] "Americanismo e riformismo. La socialdemocrazia europea nell'economia mondiale aperta", pp. 120
41. Annamaria Simonazzi [1988] "Fenomeni di isteresi nella spiegazione degli alti tassi di interesse reale", pp. 44
42. Antonietta Bassetti [1989] "Analisi dell'andamento e della casualità della borsa valori", pp. 12
43. Giovanna Procacci [1989] "State coercion and worker solidarity in Italy (1915-1918): the moral and political content of social unrest", pp. 41
44. Carlo Alberto Magni [1989] "Reputazione e credibilità di una minaccia in un gioco bargaining", pp. 56
45. Giovanni Mottura [1989] "Agricoltura familiare e sistema agroalimentare in Italia", pp. 84
46. Mario Forni [1989] "Trend, Cycle and 'Fortuitous cancellation': a Note on a Paper by Nelson and Plosser", pp. 4
47. Paolo Bosi, Roberto Golinelli, Anna Stagni [1989] "Le origini del debito pubblico e il costo della stabilizzazione", pp. 26
48. Roberto Golinelli [1989] "Note sulla struttura e sull'impiego dei modelli macroeconomici", pp. 21
49. Marco Lippi [1989] "A Shorte Note on Cointegration and Aggregation", pp. 11
50. Gian Paolo Caselli e Gabriele Pastrello [1989] "The Linkage between Tertiary and Industrial Sector in the Italian Economy: 1951-1988. From an External Dependence to an International One", pp. 40
51. Gabriele Pastrello [1989] "Francois quesnay: dal Tableau Zig-zag al Tableau Formule: una ricostruzione", pp. 48
52. Paolo Silvestri [1989] "Il bilancio dello stato", pp. 34
53. Tim Mason [1990] "Tre seminari di storia sociale contemporanea", pp. 26
54. Michele Lalla [1990] "The Aggregate Escape Rate Analysed through the Queueing Model", pp. 23
55. Paolo Silvestri [1990] "Sull'autonomia finanziaria dell'università", pp. 11
56. Paola Bertolini, Enrico Giovannetti [1990] "Uno studio di 'filiera' nell'agroindustria. Il caso del Parmigiano Reggiano", pp. 164

57. Paolo Bosi, Roberto Golinelli, Anna Stagni [1990] "Effetti macroeconomici, settoriali e distributivi dell'armonizzazione dell'IVA", pp. 24
58. Michele Lalla [1990] "Modelling Employment Spells from Emilia Labour Force Data", pp. 18
59. Andrea Ginzburg [1990] "Politica Nazionale e commercio internazionale", pp. 22
60. Andrea Giommi [1990] "La probabilità individuale di risposta nel trattamento dei dati mancanti", pp. 13
61. Gian Paolo Caselli e Gabriele Pastrello [1990] "The service sector in planned economies. Past experiences and future prospectives", pp. 32
62. Giovanni Solinas [1990] "Competenze, grandi industrie e distretti industriali, Il caso Magneti Marelli", pp. 23
63. Andrea Ginzburg [1990] "Debito pubblico, teorie monetarie e tradizione civica nell'Inghilterra del Settecento", pp. 30
64. Mario Forni [1990] "Incertezza, informazione e mercati assicurativi: una rassegna", pp. 37
65. Mario Forni [1990] "Misspecification in Dynamic Models", pp. 19
66. Gian Paolo Caselli e Gabriele Pastrello [1990] "Service Sector Growth in CPE's: An Unsolved Dilemma", pp. 28
67. Paola Bertolini [1990] "La situazione agro-alimentare nei paesi ad economia avanzata", pp. 20
68. Paola Bertolini [1990] "Sistema agro-alimentare in Emilia Romagna ed occupazione", pp. 65
69. Enrico Giovannetti [1990] "Efficienza ed innovazione: il modello "fondi e flussi" applicato ad una filiera agro-industriale", pp. 38
70. Margherita Russo [1990] "Cambiamento tecnico e distretto industriale: una verifica empirica", pp. 115
71. Margherita Russo [1990] "Distretti industriali in teoria e in pratica: una raccolta di saggi", pp. 119
72. Paolo Silvestri [1990] "La Legge Finanziaria. Voce dell'enciclopedia Europea Garzanti", pp. 8
73. Rita Paltrinieri [1990] "La popolazione italiana: problemi di oggi e di domani", pp. 57
74. Enrico Giovannetti [1990] "Illusioni ottiche negli andamenti delle Grandezze distributive: la scala mobile e l'appiattimento' delle retribuzioni in una ricerca", pp. 120
75. Enrico Giovannetti [1990] "Crisi e mercato del lavoro in un distretto industriale: il bacino delle ceramiche. Sez I", pp. 150
76. Enrico Giovannetti [1990] "Crisi e mercato del lavoro in un distretto industriale: il bacino delle ceramiche. Sez. II", pp. 145
78. Antonietta Bassetti e Costanza Torricelli [1990] "Una riqualificazione dell'approccio bargaining alla selezioni di portafoglio", pp. 4
77. Antonietta Bassetti e Costanza Torricelli [1990] "Il portafoglio ottimo come soluzione di un gioco bargaining", pp. 15
79. Mario Forni [1990] "Una nota sull'errore di aggregazione", pp. 6
80. Francesca Bergamini [1991] "Alcune considerazioni sulle soluzioni di un gioco bargaining", pp. 21
81. Michele Grillo e Michele Polo [1991] "Political Exchange and the allocation of surplus: a Model of Two-party competition", pp. 34
82. Gian Paolo Caselli e Gabriele Pastrello [1991] "The 1990 Polish Recession: a Case of Truncated Multiplier Process", pp. 26
83. Gian Paolo Caselli e Gabriele Pastrello [1991] "Polish firms: Pricate Vices Pubblis Virtues", pp. 20
84. Sebastiano Brusco e Sergio Paba [1991] "Connessioni, competenze e capacità concorrenziale nell'industria della Sardegna", pp. 25
85. Claudio Grimaldi, Rony Hamoui, Nicola Rossi [1991] "Non Marketable assets and households' Portfolio Choice: a Case of Study of Italy", pp. 38
86. Giulio Righi, Massimo Baldini, Alessandra Brambilla [1991] "Le misure degli effetti redistributivi delle imposte indirette: confronto tra modelli alternativi", pp. 47
87. Roberto Fanfani, Luca Lanini [1991] "Innovazione e servizi nello sviluppo della meccanizzazione agricola in Italia", pp. 35
88. Antonella Caiumi e Roberto Golinelli [1992] "Stima e applicazioni di un sistema di domanda Almost Ideal per l'economia italiana", pp. 34
89. Maria Cristina Marcuzzo [1992] "La relazione salari-occupazione tra rigidità reali e rigidità nominali", pp. 30
90. Mario Biagioli [1992] "Employee financial participation in enterprise results in Italy", pp. 50
91. Mario Biagioli [1992] "Wage structure, relative prices and international competitiveness", pp. 50
92. Paolo Silvestri e Giovanni Solinas [1993] "Abbandoni, esiti e carriera scolastica. Uno studio sugli studenti iscritti alla Facoltà di Economia e Commercio dell'Università di Modena nell'anno accademico 1990/1991", pp. 30
93. Gian Paolo Caselli e Luca Martinelli [1993] "Italian GPN growth 1890-1992: a unit root or segmented trend representatin?", pp. 30
94. Angela Politi [1993] "La rivoluzione fraintesa. I partigiani emiliani tra liberazione e guerra fredda, 1945-1955", pp. 55
95. Alberto Rinaldi [1993] "Lo sviluppo dell'industria metalmeccanica in provincia di Modena: 1945-1990", pp. 70
96. Paolo Emilio Mistrulli [1993] "Debito pubblico, intermediari finanziari e tassi d'interesse: il caso italiano", pp. 30
97. Barbara Pistoresi [1993] "Modelling disaggregate and aggregate labour demand equations. Cointegration analysis of a labour demand function for the Main Sectors of the Italian Economy: 1950-1990", pp. 45
98. Giovanni Bonifati [1993] "Progresso tecnico e accumulazione di conoscenza nella teoria neoclassica della crescita endogena. Una analisi critica del modello di Romer", pp. 50
99. Marcello D'Amato e Barbara Pistoresi [1994] "The relationship(s) among Wages, Prices, Unemployment and Productivity in Italy", pp. 30
100. Mario Forni [1994] "Consumption Volatility and Income Persistence in the Permanent Income Model", pp. 30
101. Barbara Pistoresi [1994] "Using a VECM to characterise the relative importance of permanent and transitory components", pp. 28
102. Gian Paolo Caselli and Gabriele Pastrello [1994] "Polish recovery form the slump to an old dilemma", pp. 20
103. Sergio Paba [1994] "Imprese visibili, accesso al mercato e organizzazione della produzione", pp. 20
104. Giovanni Bonifati [1994] "Progresso tecnico, investimenti e capacità produttiva", pp. 30
105. Giuseppe Marotta [1994] "Credit view and trade credit: evidence from Italy", pp. 20
106. Margherita Russo [1994] "Unit of investigation for local economic development policies", pp. 25
107. Luigi Brighi [1995] "Monotonicity and the demand theory of the weak axioms", pp. 20
108. Mario Forni e Lucrezia Reichlin [1995] "Modelling the impact of technological change across sectors and over time in manufacturing", pp. 25
109. Marcello D'Amato and Barbara Pistoresi [1995] "Modelling wage growth dynamics in Italy: 1960-1990", pp. 38
110. Massimo Baldini [1995] "INEMOD. Un modello di microsimulazione per lo studio delle imposte indirette", pp. 37

111. Paolo Bosi [1995] "Regionalismo fiscale e autonomia tributaria: l'emersione di un modello di consenso", pp. 38
112. Massimo Baldini [1995] "Aggregation Factors and Aggregation Bias in Consumer Demand", pp. 33
113. Costanza Torricelli [1995] "The information in the term structure of interest rates. Can stochastic models help in resolving the puzzle?" pp. 25
114. Margherita Russo [1995] "Industrial complex, pôle de développement, distretto industriale. Alcune questioni sulle unità di indagine nell'analisi dello sviluppo." pp. 45
115. Angelika Moryson [1995] "50 Jahre Deutschland. 1945 - 1995" pp. 21
116. Paolo Bosi [1995] "Un punto di vista macroeconomico sulle caratteristiche di lungo periodo del nuovo sistema pensionistico italiano." pp. 32
117. Gian Paolo Caselli e Salvatore Curatolo [1995] "Esistono relazioni stimabili fra dimensione ed efficienza delle istituzioni e crescita produttiva? Un esercizio nello spirito di D.C. North." pp. 11
118. Mario Forni e Marco Lippi [1995] "Permanent income, heterogeneity and the error correction mechanism." pp. 21
119. Barbara Pistoresi [1995] "Co-movements and convergence in international output. A Dynamic Principal Components Analysis" pp. 14
120. Mario Forni e Lucrezia Reichlin [1995] "Dynamic common factors in large cross-section" pp. 17
121. Giuseppe Marotta [1995] "Il credito commerciale in Italia: una nota su alcuni aspetti strutturali e sulle implicazioni di politica monetaria" pp. 20
122. Giovanni Bonifati [1995] "Progresso tecnico, concorrenza e decisioni di investimento: una analisi delle determinanti di lungo periodo degli investimenti" pp. 25
123. Giovanni Bonifati [1995] "Cambiamento tecnico e crescita endogena: una valutazione critica delle ipotesi del modello di Romer" pp. 21
124. Barbara Pistoresi e Marcello D'Amato [1995] "La riservatezza del banchiere centrale è un bene o un male? Effetti dell'informazione incompleta sul benessere in un modello di politica monetaria." pp. 32
125. Barbara Pistoresi [1995] "Radici unitarie e persistenza: l'analisi univariata delle fluttuazioni economiche." pp. 33
126. Barbara Pistoresi e Marcello D'Amato [1995] "Co-movements in European real outputs" pp. 20
127. Antonio Ribba [1996] "Ciclo economico, modello lineare-stocastico, forma dello spettro delle variabili macroeconomiche" pp. 31
128. Carlo Alberto Magni [1996] "Repeatable and a tantum real options a dynamic programming approach" pp. 23
129. Carlo Alberto Magni [1996] "Opzioni reali d'investimento e interazione competitiva: programmazione dinamica stocastica in optimal stopping" pp. 26
130. Carlo Alberto Magni [1996] "Vaghezza e logica fuzzy nella valutazione di un'opzione reale" pp. 20
131. Giuseppe Marotta [1996] "Does trade credit redistribution thwart monetary policy? Evidence from Italy" pp. 20
132. Mauro Dell'Amico e Marco Trubian [1996] "Almost-optimal solution of large weighted equicut problems" pp. 30
133. Carlo Alberto Magni [1996] "Un esempio di investimento industriale con interazione competitiva e avversione al rischio" pp. 20
134. Margherita Russo, Peter Börkey, Emilio Cubel, François Lévêque, Francisco Mas [1996] "Local sustainability and competitiveness: the case of the ceramic tile industry" pp. 66
135. Margherita Russo [1996] "Camionetto tecnico e relazioni tra imprese" pp. 190
136. David Avra Lane, Irene Poli, Michele Lalla, Alberto Roverato [1996] "Lezioni di probabilità e inferenza statistica" pp. 288
137. David Avra Lane, Irene Poli, Michele Lalla, Alberto Roverato [1996] "Lezioni di probabilità e inferenza statistica - Esercizi svolti -" pp. 302
138. Barbara Pistoresi [1996] "Is an Aggregate Error Correction Model Representative of Disaggregate Behaviours? An example" pp. 24
139. Luisa Malaguti e Costanza Torricelli [1996] "Monetary policy and the term structure of interest rates" , pp. 30
140. Mauro Dell'Amico, Martine Labbé, Francesco Maffioli [1996] "Exact solution of the SONET Ring Loading Problem", pp. 20
141. Mauro Dell'Amico, R.J.M. Vaessens [1996] "Flow and open shop scheduling on two machines with transportation times and machine-independent processing times in NP-hard, pp. 10
142. M. Dell'Amico, F. Maffioli, A. Sciomechen [1996] "A Lagrangean Heuristic for the Pirze Collecting Travelling Salesman Problem", pp. 14
143. Massimo Baldini [1996] "Inequality Decomposition by Income Source in Italy - 1987 - 1993", pp. 20
144. Graziella Bertocchi [1996] "Trade, Wages, and the Persistence of Underdevelopment" pp. 20
145. Graziella Bertocchi and Fabio Canova [1996] "Did Colonization matter for Growth? An Empirical Exploration into the Historical Causes of Africa's Underdevelopment" pp. 32
146. Paola Bertolini [1996] "La modernization de l'agriculture italienne et le cas de l'Emilie Romagne" pp. 20
147. Enrico Giovannetti [1996] "Organisation industrielle et développement local: le cas de l'agroindutrie in Emilie Romagne" pp. 18
148. Maria Elena Bontempi e Roberto Golinelli [1996] "Le determinanti del leverage delle imprese: una applicazione empirica ai settori industriali dell'economia italiana" pp. 31
149. Paola Bertolini [1996] "L'agriculture et la politique agricole italienne face aux recents scenarios", pp. 20
150. Enrico Giovannetti [1996] "Il grado di utilizzo della capacità produttiva come misura dei costi di transazione: una rilettura di 'Nature of the Firm' di R. Coase", pp. 75
151. Enrico Giovannetti [1996] "Il I° ciclo del Diploma Universitario Economia e Amministrazione delle Imprese", pp. 25
152. Paola Bertolini, Enrico Giovannetti, Giulia Santacaterina [1996] "Il Settore del Verde Pubblico. Analisi della domanda e valutazione economica dei benefici", pp. 35
153. Giovanni Solinas [1996] "Sistemi produttivi del Centro-Nord e del Mezzogiorno. L'industria delle calzature", pp. 55
154. Tindara Addabbo [1996] "Married Women's Labour Supply in Italy in a Regional Perspective", pp. 85
155. Paolo Silvestri, Giuseppe Catalano, Cristina Bevilacqua [1996] "Le tasse universitarie e gli interventi per il diritto allo studio: la prima fase di applicazione di una nuova normativa" pp. 159
156. Sebastiano Brusco, Paolo Bertossi, Margherita Russo [1996] "L'industria dei rifiuti urbani in Italia", pp. 25
157. Paolo Silvestri, Giuseppe Catalano [1996] "Le risorse del sistema universitario italiano: finanziamento e governo" pp. 400
158. Carlo Alberto Magni [1996] "Un semplice modello di opzione di differimento e di vendita in ambito discreto", pp. 10
159. Tito Pietra, Paolo Siconolfi [1996] "Fully Revealing Equilibria in Sequential Economies with Asset Markets" pp. 17
160. Tito Pietra, Paolo Siconolfi [1996] "Extrinsic Uncertainty and the Informational Role of Prices" pp. 42
161. Paolo Bertella Farnetti [1996] "Il negro e il rosso. Un precedente non esplorato dell'integrazione afroamericana negli Stati Uniti" pp. 26
162. David Lane [1996] "Is what is good for each best for all? Learning from others in the information contagion model" pp. 18

163. Antonio Ribba [1996] "A note on the equivalence of long-run and short-run identifying restrictions in cointegrated systems" pp. 10
164. Antonio Ribba [1996] "Scomposizioni permanenti-transitorie in sistemi cointegrati con una applicazione a dati italiani" pp. 23
165. Mario Forni, Sergio Paba [1996] "Economic Growth, Social Cohesion and Crime" pp. 20
166. Mario Forni, Lucrezia Reichlin [1996] "Let's get real: a factor analytical approach to disaggregated business cycle dynamics" pp. 25
167. Marcello D'Amato e Barbara Pistoiesi [1996] "So many Italies: Statistical Evidence on Regional Cohesion" pp. 31
168. Elena Bonfiglioli, Paolo Bosi, Stefano Toso [1996] "L'equità del contributo straordinario per l'Europa" pp. 20
169. Graziella Bertocchi, Michael Spagat [1996] "Il ruolo dei licei e delle scuole tecnico-professionali tra progresso tecnologico, conflitto sociale e sviluppo economico" pp. 37
170. Gianna Boero, Costanza Torricelli [1997] "The Expectations Hypothesis of the Term Structure of Interest Rates: Evidence for Germany" pp. 15
171. Mario Forni, Lucrezia Reichlin [1997] "National Policies and Local Economies: Europe and the US" pp. 22
172. Carlo Alberto Magni [1997] "La trappola del Roe e la tridimensionalità del Van in un approccio sistemico", pp. 16
173. Mauro Dell'Amico [1997] "A Linear Time Algorithm for Scheduling Outforests with Communication Delays on Two or Three Processor" pp. 18
174. Paolo Bosi [1997] "Aumentare l'età pensionabile fa diminuire la spesa pensionistica? Ancora sulle caratteristiche di lungo periodo della riforma Dini" pp. 13
175. Paolo Bosi e Massimo Matteuzzi [1997] "Nuovi strumenti per l'assistenza sociale" pp. 31
176. Mauro Dell'Amico, Francesco Maffioli e Marco Trubian [1997] "New bounds for optimum traffic assignment in satellite communication" pp. 21
177. Carlo Alberto Magni [1997] "Paradossi, inverosimiglianze e contraddizioni del Van: operazioni certe" pp. 9
178. Barbara Pistoiesi e Marcello D'Amato [1997] "Persistence of relative unemployment rates across italian regions" pp. 25
179. Margherita Russo, Franco Cavedoni e Riccardo Pianesani [1997] "Le spese ambientali dei Comuni in provincia di Modena, 1993-1995" pp. 23
180. Gabriele Pastrello [1997] "Time and Equilibrium. Two Elusive Guests in the Keynes-Hawtrey-Robertson Debate in the Thirties" pp. 25
181. Luisa Malaguti e Costanza Torricelli [1997] "The Interaction Between Monetary Policy and the Expectation Hypothesis of the Term Structure of Interest rates in a N-Period Rational Expectation Model" pp. 27
182. Mauro Dell'Amico [1997] "On the Continuous Relaxation of Packing Problems - Technical Note" pp. 8
183. Stefano Bordini [1997] "Prova di Idoneità di Informatica Dispensa Esercizi Excel 5" pp. 49
184. Francesca Bergamini e Stefano Bordini [1997] "Una verifica empirica di un nuovo metodo di selezione ottima di portafoglio" pp. 22
185. Gian Paolo Caselli e Maurizio Battini [1997] "Following the tracks of atkinson and micklewright the changing distribution of income and earnings in poland from 1989 to 1995" pp. 21
186. Mauro Dell'Amico e Francesco Maffioli [1997] "Combining Linear and Non-Linear Objectives in Spanning Tree Problems" pp. 21
187. Gianni Ricci e Vanessa Debbia [1997] "Una soluzione evolutiva in un gioco differenziale di lotta di classe" pp. 14
188. Fabio Canova e Eva Ortega [1997] "Testing Calibrated General Equilibrium Model" pp. 34
189. Fabio Canova [1997] "Does Detrending Matter for the Determination of the Reference Cycle and the Selection of Turning Points?" pp. 35
190. Fabio Canova e Gianni De Nicolò [1997] "The Equity Premium and the Risk Free Rate: A Cross Country, Cross Maturity Examination" pp. 41
191. Fabio Canova e Angel J. Ubide [1997] "International Business Cycles, Financial Market and Household Production" pp. 32
192. Fabio Canova e Gianni De Nicolò [1997] "Stock Returns, Term Structure, Inflation and Real Activity: An International Perspective" pp. 33
193. Fabio Canova e Morten Ravn [1997] "The Macroeconomic Effects of German Unification: Real Adjustments and the Welfare State" pp. 34
194. Fabio Canova [1997] "Detrending and Business Cycle Facts" pp. 40
195. Fabio Canova e Morten O. Ravn [1997] "Crossing the Rio Grande: Migrations, Business Cycle and the Welfare State" pp. 37
196. Fabio Canova e Jane Marrinan [1997] "Sources and Propagation of International Output Cycles: Common Shocks or Transmission?" pp. 41
197. Fabio Canova e Albert Marcet [1997] "The Poor Stay Poor: Non-Convergence Across Countries and Regions" pp. 44
198. Carlo Alberto Magni [1997] "Un Criterio Strutturalista per la Valutazione di Investimenti" pp. 17
199. Stefano Bordini [1997] "Elaborazione Automatica dei Dati" pp. 60
200. Paolo Bertella Farnetti [1997] "The United States and the Origins of European Integration" pp. 19
201. Paolo Bosi [1997] "Sul Controllo Dinamico di un Sistema Pensionistico a Ripartizione di Tipo Contributivo" pp. 17
202. Paola Bertolini [1997] "European Union Agricultural Policy: Problems and Perspectives" pp. 18
203. Stefano Bordini [1997] "Supporti Informatici per la Ricerca delle soluzioni di Problemi Decisionali" pp. 30
204. Carlo Alberto Magni [1997] "Paradossi, Inverosimiglianze e Contraddizioni del Van: Operazioni Aleatorie" pp. 10
205. Carlo Alberto Magni [1997] "Tir, Roe e Van: Distorsioni linguistiche e Cognitive nella Valutazione degli Investimenti" pp. 17
206. Gisella Facchinetti, Roberto Ghiselli Ricci e Silvia Muzzioli [1997] "New Methods For Ranking Triangular Fuzzy Numbers: An Investment Choice" pp. 9
207. Mauro Dell'Amico e Silvano Martello [1997] "Reduction of the Three-Partition Problem" pp. 16
208. Carlo Alberto Magni [1997] "IRR, ROE and NPV: a Systemic Approach" pp. 20
209. Mauro Dell'Amico, Andrea Lodi e Francesco Maffioli [1997] "Solution of the cumulative assignment problem with a well-structured tabu search method" pp. 25
210. Carlo Alberto Magni [1997] "La definizione di investimento e criterio del Tir ovvero: la realtà inventata" pp. 16
211. Carlo Alberto Magni [1997] "Critica alla definizione classica di investimento: un approccio sistemico" pp. 17
212. Alberto Roverato [1997] "Asymptotic prior to posterior analysis for graphical gaussian models" pp. 8
213. Tindara Addabbo [1997] "Povertà nel 1995 analisi statica e dinamica sui redditi familiari" pp. 64
214. Gian Paolo Caselli e Franca Manghi [1997] "La transizione da piano a mercato e il modello di Ising" pp. 15
215. Tindara Addabbo [1998] "Lavoro non pagato e reddito esteso un'applicazione alle famiglie italiane in cui entrambi i coniugi sono lavoratori dipendenti" pp. 54

216. Tindara Addabbo [1998] "Probabilità di occupazione e aspettative individuali" pp 36
217. Lara Magnani [1998] "Transazioni, contratti e organizzazioni: una chiave di lettura della teoria economica dell'organizzazione pp 39
218. Michele Lalla, Rosella Molinari e Maria Grazia Modena [1998] "La progressione delle carriere: i percorsi in cardiologia" pp 46
219. Lara Magnani [1998] "L'organizzazione delle transazioni di subfornitura nel distretto industriale" pp 40
220. Antonio Ribba [1998] "Recursive VAR orderings and identification of permanent and transitory shocks" pp12
221. Antonio Ribba [1998] "Granger-causality and exogeneity in cointegrated Var models" pp 5
222. Luigi Brighi e Marcello D'Amato [1998] "Optimal Procurement in Multiproduct Monopoly" pp 25
223. Paolo Bosi, Maria Cecilia Guerra e Paolo Silvestri [1998] "La spesa sociale nel comune Modena" Rapporto intermedio pp 37
224. Mario Forni e Marco Lippi [1998] "On the Microfoundations of Dynamic Macroeconomics" pp 22
225. Roberto Ghiselli Ricci [1998] "Nuove Proposte di Ordinamento di Numeri Fuzzy. Una Applicazione ad un Problema di Finanziamento pp 7
226. Tommaso Minerva [1998] "Internet Domande e Risposte" pp 183
227. Tommaso Minerva [1998] "Elementi di Statistica Computazione. Parte Prima: Il Sistema Operativo Unix ed il Linguaggio C" pp. 57
228. Tommaso Minerva and Irene Poli [1998] "A Genetic Algorithms Selection Method for Predictive Neural Nets and Linear Models" pp. 60
229. Tommaso Minerva and Irene Poli [1998] "Building an ARMA Model by using a Genetic Algorithm" pp 60
230. Mauro Dell'Amico e Paolo Toth [1998] "Algorithms and Codes for Dense Assignment Problems: the State of the Art" pp 35
231. Ennio Cavazzuti e Nicoletta Pacchiarotti [1998] "How to play an hotelling game in a square town" pp 12
232. Alberto Roverato e Irene Poli [1998] "Un algoritmo genetico per la selezione di modelli grafici" pp 11
233. Marcello D'Amato e Barbara Pistoresi [1998] "Delegation of Monetary Policy to a Central Banker with Private Information" pp 15.
234. Graziella Bertocchi e Michael Spagat [1998] "The Evolution of Modern Educational Systems. Technical vs. General Education, Distributional Conflict, and Growth" pp 31
235. André Dumas [1998] "Le systeme monetaire Europeen" pp 24.
236. Gianna Boero, Gianluca Di Lorenzo e Costanza Torricelli [1998] "The influence of short rate predictability and monetary policy on tests of the expectations hypothesis: some comparative evidence" pp 30
237. Carlo Alberto Magni [1998] "A systemic rule for investment decisions: generalizations of the traditional DCF criteria and new conceptions" pp 30
238. Marcello D'Amato e Barbara Pistoresi [1998] "Interest Rate Spreads Between Italy and Germany: 1995-1997" pp 16
239. Paola Bertolini e Alberto Bertacchini [1998] "Il distretto di lavorazioni carni suine in provincia di Modena" pp 29
240. Costanza Torricelli e Gianluca Di Lorenzo [1998] "Una nota sui fondamenti matematico-finanziari della teoria delle aspettative della struttura della scadenza" pp. 15
241. Christophe Croux, Mario Forni e Lucrezia Reichlin [1998] "A Measure of Comovement for Economic Indicators: Theory and Empirics" pp 23.
242. Carlo Alberto Magni [1998] "Note sparse sul dilemma del prigioniero (e non solo) pp 13.
243. Gian Paolo Caselli [1998] The future of mass consumption society in the former planned economies: a macro approach pp 21.
244. Mario Forni, Marc Hallin, Marco Lippi e Lucrezia Reichlin [1998] "The generalized dynamic factor model: identification and estimation pp 35.
245. Carlo Alberto Magni [1998] "Pictures, language and research: the case of finance and financial mathematics" pp 35.
246. Luigi Brighi [1998] "Demand and generalized monotonicity" pp 21.
247. Mario Forni e Lucrezia Reichlin [1998] "Risk and potential insurance in Europe" pp 20.
248. Tommaso Minerva, Sandra Paterlini e Irene Poli [1998] "A Genetic Algorithm for predictive Neural Network Design (GANND). A Financial Application" pp 12.
249. Gian Paolo Caselli Maurizio Battini [1998] "The Changing Distribution of Earnings in Poland from 1989 to 1996 pp. 9.
250. Mario Forni, Sergio Paba [1998] "Industrial Districts, Social Environment and Local Growth" Evidence from Italy pp. 27.
251. Lara Magnani [1998] "Un'analisi del distretto industriale fondata sulla moderna teoria economica dell'organizzazione" pp. 46.
252. Mario Forni, Lucrezia Reichlin [1998] "Federal Policies and Local Economies: Europe and the US" pp. 24.
253. Luigi Brighi [1998] "A Case of Optimal Regulation whit Multidimensional Private Information" pp 20.
254. Barbara Pistoresi, Stefania Luppi [1998] "Gli investimenti diretti esteri nell'America Latina e nel Sud Est Asiatico: 1982-1995" pp 27.
255. Paola Mengoli, Margherita Russo [1998] "Technical and Vocational Education and Training in Italy: Structure and Changes at National and Regional Level" pp 25.
256. Tindara Addabbo [1998] "On-the-Job Search a Microeconomic Analysis on Italian Data" pp. 29.
257. Lorenzo Bertucelli [1999] "Il paternalismo industriale: una discussione storiografica" pp.21.
258. Mario Forni e Marco Lippi [1999] "The generalized dynamic factor model: representation theory" pp. 25.
259. Andrea Ginzburg e Annamaria Simonazzi [1999] "Foreign debt cycles and the 'Gibson Paradox': an interpretative hypothesis" pp. 38.
260. Paolo Bosi [1999] "La riforma della spesa per assistenza dalla Commissione Onofri ad oggi: una valutazione in corso d'opera" pp 56.
261. Marcello D'Amato e Barbara Pistoresi [1999] "Go and soothe the row. Delegation of monetary policy under private information" pp. 23.
262. Michele Lalla [1999] "Sampling, Maintenance, and Weighting Schemes for Longitudinal Surveys: a Case Study of the Textile and Clothing Industry" pp. 27.
263. Pederzoli Chiara e Torricelli Costanza [1999] "Una rassegna sui metodi di stima del Value at Risk (Var)".
264. Paolo Bosi, Maria Cecilia Guerra e Paolo Silvestri [1999] "La spesa sociale di Modena. La valutazione della condizione economica" pp 74.
265. Graziella Bertocchi e Michael Spagat [1999] "The Politics Co-optation" pp 14.
266. Giovanni Bonifati [1999] "The Capacity to Generate Investment. An analysis of the long-term determinants of investment" pp 22.
267. Tindara Addabbo e Antonella Caiumi [1999] "Extended Income and Inequality by Gender in Italy" pp. 40.
268. Antonella Caiumi e Federico Perali [1999] "Children and Intrahousehold Distribution of Resources: An Estimate of the Sharing Rule of Italian Households" pp 24
269. Vincenzo Atella, Antonella Caiumi e Federico Perali [1999] "Una scala di equivalenza non vale l'altra" pp.23.

- 270 Tito Pietra e Paolo Siconolfi [1999] "Volume of Trade and Revelation of Information" pp. 33.
- 271 Antonella Picchio [1999] "La questione del lavoro non pagato nella produzione di servizi nel nucleo domestico (Household)" pp.58.
- 272 Margherita Russo [1999] "Complementary Innovations and Generative Relationships in a Small Business Production System: the Case of Kervit" pp.27.
- 273 André Dumas [1999] "L'Economie de la drouge" pp. 12.
- 274 André Dumas [1999] "L'Euro à l'heure actuelle" pp. 12.
- 275 Michele Lalla Gisella Facchinetti [1999] "La valutazione dell'attività didattica: un confronto tra scale di misura e insiemi sfocati" pp.32.
- 276 Mario Biagioli [1999] "Formazione e valorizzazione del capitale umano: un'indagine sui paesi dell'Unione Europea" pp.21.
- 277 Mario Biagioli [1999] "Disoccupazione, formazione del capitale umano e determinazione dei salari individuali: un'indagine su microdati nei paesi dell'Unione Europea" pp.15.
- 278 Gian Paolo Caselli Giulia Bruni [1999] Il settore petrolifero russo, il petrolio del Mar Caspio e gli interessi geopolitici nell'area" pp. 28.
- 279 Luca Gambetti [1999] "The Real Effect of Monetary Policy: a New Var Identification Procedure" pp.22.
- 280 Marcello D'Amato Barbara Pistoiesi [1999] "Assessing Potential Targets for Labour Market Reforms in Italy" pp. 8.
- 281 Gian Paolo Caselli Giulia Bruni e Francesco Pattarin [1999] "Gaddy and Ickes Model of Russian Barter Economy: Some Criticisms and Considerations" pp.10.
- 282 Silvia Muzzioli Costanza Torricelli [1999] "A Model for Pricing an Option with a Fuzzy Payoff" pp. 13.
- 283 Antonella Caiumi Federico Perali [1999] "Povertà e Welfare in Italia in Relazione alla Scelta della Scala di Equivalenza" pp.25.
- 284 Marcello Galli Tommaso Minerva [1999] "Algoritmi Genetici per l'Evoluzione di Modelli Lineari *Metodologia ad Applicazioni*" pp.36.
- 285 Mario Forni Sergio Paba [1999] "Knowledge Spillovers and the Growth of Local Industries" pp. 20.
- 286 Gisella Facchinetti Giovanni Mastroleo [1999] "Un confronto tra uno score card ed un approccio fuzzy per la concessione del credito personale" pp.27.
- 287 Gisella Facchinetti Giovanni Mastroleo e Sergio Paba [1999] "A Statistical and Fuzzy Algorithm for the Identification of Industrial Districts" pp.6.
- 288 Tommaso Minerva [1999] "Didattica e Informatica. *Una indagine Statistica relativa alla Provincia di Modena sul rapporto tra Insegnanti e Nuove Tecnologie*" pp. 46.
- 289 Andrea Ginzburg [1999] "Straffa e l'analisi sociale: alcune note metodologiche" pp. 37.
- 290 Consolato Pellegrino Carla Fiori [1999] "Piani Formalmente Euclidei" pp. 11.
- 291 Nicolina A. Malara, Maria Teresa Brandoli e Carla Fiori [1999] "Comportamenti di Studenti in Ingresso all'Università di Fronte allo Studio di Disequazioni" pp. 15.